[東京工業大学 1996 年前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

2 以上の整数 n に対して方程式

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1x_2\cdots x_n$$

の正の整数解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ を考える。ただし，たとえば (1, 2, 3) と (3, 2, 1) は異なる解とみなす。このとき次の問に答えよ。

(1) $n=2$ および $n=3$ のときの解をすべて求めよ。

(2) 解が 1 つしかないような n をすべて求めよ。

(3) 任意の n に対して解は少なくとも 1 つ存在し，かつ有限個しかないことを示せ。

☆ ☆

(1) $n=2$ のとき

$x_1+x_2=x_1x_2 \iff (x_1-1)(x_2-1)=1$

$x_1,\ x_2$ は正の整数であるから $(x_1-1,\ x_2-1)=(1,1)$

よって $(x_1,\ x_2)=(2,\ 2)$

$n=3$ のとき

$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$ として考える。

方程式 $x_1+x_2+x_3=x_1x_2x_3$ において

$x_2,\ x_3\to x_1$ とすると $x_1+x_2+x_3 \leqq 3x_3$

$x_2\to x_1$ とすると $x_1+x_2+x_3 \geqq x_1x_1x_3$ となるので

$x_1x_1x_3 \leqq 3x_3$ すなわち $x_1{}^2 \leqq 3$ となることがわかる。しかがって $x_1=1$

このとき，$1+x_2+x_3=1\cdot x_2x_3 \iff (x_2-1)(x_3-1)=2$

$x_2,\ x_3$ は正の整数であるから $(x_2,\ x_3)=(2,\ 3)$

$x_1,\ x_2,\ x_3$ を並び替えたものもすべて解になるので，求める解は

$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,1,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)$

(2) $x_1=x_2=\cdots=x_n$ を満たさない解が 1 つでも存在すれば，$x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n$ を並び替えることにより他の解が存在することになるので，題意を満たさない。

よって $x_1=x_2=\cdots=x_n$ として自然数 x についての方程式 $nx=x^n$ すなわち $x^{n-1}=n$ を考える。

与えられた方程式の解が 1 つしか存在しないために，これがただ 1 つの解をもつことが必要である。そのためには $n=2$ でなければならない。

実際，$n \geqq 3$ であるとすると，

任意の自然数 $x \geqq 2$ に対し，$x^{n-1} > n$，

$x = 1$ に対し，$x^{n-1} < n$　となることから

$x^{n-1} = n$ は成り立たない。

一方，$n = 2$ のときは，$x^{n-1} = n$ は $x = 2$ を唯一の解としてもつ。

逆に $n = 2$ のとき，(1)より確かにただ 1 つの解をもつ。

よって求める n は $n = 2$ のみ。

(3)　(ⅰ) [解の存在について]

$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1$，$x_{n-1} = 2$，$x_n = n$　とすると

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-2\text{ 個}} + 2 + n = 2n$$

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-2} x_{n-1} x_n = \underbrace{1\times1\times\cdots\times1}_{n-2\text{ 個}} \times 2 \times n = 2n$$

となるので，この $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ は解の 1 つになっている。

(ⅱ) [解の有限性について]

$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ が $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ …（＊）を満たすとすると

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq n x_n$

$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n \geqq x_{n-1} x_n$

であるから，$x_{n-1} x_n \leqq n x_n$ したがって $x_{n-1} \leqq n$ であることが必要である。

$1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{n-1} \leqq n$ より，整数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$ のとりうる値の可能性は有限個である。

ところで，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$ の値が決まれば，与えられた方程式

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$　は（$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$ の場合を除いて）

x_n についての 1 次方程式であるから，これを満たす正の整数 x_n は高々1 つである。

$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$ のときは，与式が $n + 1 + x_n = x_n$ となり解が存在しないので，

（＊）を満たす解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ は，存在しても有限個である。条件（＊）を外しても，解の個数は高々 $n!$ 倍になるだけである。

(ⅰ)(ⅱ)より，題意は示された。

（証明終）

〔参考〕

(1)は不定方程式の問題。$n=2$ のときは，「積＝定数」の形に変形。

$n=3$ のときは，不等式を評価して x_1 のとりうる値の範囲を絞っている。

(2)は，「$x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1x_2\cdots x_n$ を満たす自然数の組 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ がただ 1 つ存在する」ために「$nx=x^n$ を満たす自然数 x がただ 1 つ存在する」ことが必要という論理である。

(3)は，まず解の具体例を構成して示すことにより「存在」を証明し，その後，解が有限な領域に含まれることを示すことにより「有限性」を証明している。

[東京工業大学 1996 年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

$p=\cos\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，$q,\ r,\ s$ を正数とする。また，行列 A を $A=\begin{pmatrix} p & -q \\ r & s \end{pmatrix}$ とする。

A で表される 1 次変換により，楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（ただし，$a,\ b>0$）上の点は C 上にうつるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 行列 A を $\theta,\ a,\ b$ を用いて表せ。

(2) 自然数 n に対し，A^n を求めよ。

☆ ☆

(1) C 上の点 $(a,\ 0)$ の A による像は $\begin{pmatrix} p & -q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap \\ ar \end{pmatrix}$ より $(ap,\ ar)$

これが C 上にあることから $\dfrac{(ap)^2}{a^2}+\dfrac{(ar)^2}{b^2}=1$

$$p^2+\frac{a^2r^2}{b^2}=1$$

$$a^2r^2=b^2(1-p^2)$$

$$r^2=\frac{b^2}{a^2}(1-p^2)$$

$$=\frac{b^2}{a^2}(1-\cos^2\theta)$$

$$=\frac{b^2}{a^2}\sin^2\theta$$

$r>0$ より $\quad r=\dfrac{b}{a}\sin\theta$

また，点 $(0,\ b)$ の A による像は $\begin{pmatrix} p & -q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -bq \\ bs \end{pmatrix}$ より $(-bq,\ bs)$

これが C 上にあることから $\dfrac{(-bq)^2}{a^2}+\dfrac{(bs)^2}{b^2}=1$

$$\frac{b^2q^2}{a^2}+s^2=1$$

$$b^2q^2+a^2s^2=a^2\ \cdots①$$

さらに，C 上の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}a,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}b\right)$ の A による像は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} p & -q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ap-bq) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ar+bs) \end{pmatrix}$ より

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(ap-bq),\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ar+bs)\right)$ これが C 上にあることから

$$b^2\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(ap-bq)\right\}^2+a^2\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(ar+bs)\right\}^2=a^2b^2$$

$$b^2(a^2p^2-2abpq+b^2q^2)+a^2(a^2r^2+2abrs+b^2s^2)=2a^2b^2$$

$p=\cos\theta,\ r=\dfrac{b}{a}\sin\theta$ を代入して

$$b^2(a^2\cos^2\theta-2abq\cos\theta+b^2q^2)+a^2(b^2\sin^2\theta+2b^2s\sin\theta+b^2s^2)=2a^2b^2$$

b^2 で割って

$$a^2\cos^2\theta-2abq\cos\theta+b^2q^2+a^2\sin^2\theta+2a^2s\sin\theta+a^2s^2=2a^2$$

①より　$b^2q^2=a^2-a^2s^2$　として代入すると

$$\underline{a^2\cos^2\theta}-2abq\cos\theta\underline{\underline{+b^2q^2}}\ \underline{+a^2\sin^2\theta}+2a^2s\sin\theta+a^2s^2=2a^2$$

$$\underline{a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}-2abq\cos\theta\underline{\underline{+a^2-a^2s^2}}+2a^2s\sin\theta+a^2s^2-2a^2=0$$

$$-2abq\cos\theta+2a^2s\sin\theta=0$$

$$bq\cos\theta=as\sin\theta$$

$$\therefore\ bq=as\tan\theta\ \cdots ②$$

①に代入して　$a^2s^2\tan^2\theta+a^2s^2=a^2$

$$(1+\tan^2\theta)s^2=1$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}s^2=1$$

$$s^2=\cos^2\theta$$

$s>0$ より　$s=\cos\theta$

したがって，②より　$bq=a\cdot\cos\theta\cdot\tan\theta$

$$q=\frac{a}{b}\sin\theta$$

よって　$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\dfrac{a}{b}\sin\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(2)

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\dfrac{a}{b}\sin\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$ に対し，ケーリー・ハミルトンの恒等式より

$$A^2-(\cos\theta+\cos\theta)A+\left(\cos\theta\cdot\cos\theta-\left(-\frac{a}{b}\sin\theta\right)\cdot\frac{b}{a}\sin\theta\right)=O$$

$\therefore\quad A^2-2\cos\theta A+E=O$　ただし，E は単位行列，O は零行列である。

したがって　$A^2=2\cos\theta A-E$

$$=2\cos\theta\begin{pmatrix}\cos\theta & -\dfrac{a}{b}\sin\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\cos^2\theta-1 & -\dfrac{a}{b}\cdot 2\sin\theta\cos\theta \\ \dfrac{b}{a}\cdot 2\sin\theta\cos\theta & 2\cos^2\theta-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\dfrac{a}{b}\sin 2\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}$$

となる。

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\dfrac{a}{b}\sin n\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$ と推定できるので，この推定が正しいことを数学的帰納法で証明する。

(ｉ) $n=1$ のとき

$$A^1=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\dfrac{a}{b}\sin\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$ より成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき

$$A^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\dfrac{a}{b}\sin k\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}$$ であると仮定する。

このとき, $A^{k+1}=A^k\cdot A$

$$=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\dfrac{a}{b}\sin k\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos \theta & -\dfrac{a}{b}\sin \theta \\ \dfrac{b}{a}\sin \theta & \cos \theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta & -\dfrac{a}{b}\sin\theta\cos k\theta-\dfrac{a}{b}\cos\theta\sin k\theta \\ \dfrac{a}{b}\sin\theta\cos k\theta+\dfrac{a}{b}\cos\theta\sin k\theta & \cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(k\theta+\theta) & -\dfrac{a}{b}\sin(\theta+k\theta) \\ \dfrac{a}{b}\sin(\theta+k\theta) & \cos(k\theta+\theta)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta & -\dfrac{a}{b}\sin(k+1)\theta \\ \dfrac{a}{b}\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{pmatrix}$$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

(ⅰ), (ⅱ)より $$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\dfrac{a}{b}\sin n\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

[東京工業大学 1996 年前期 $\boxed{3}$]

関数 $f(x)=px^7(x-\alpha)(x-\beta)$ が $x=1$ で極値 1 をとり，さらに x 軸と曲線 $y=f(x)$ で囲まれ面積が有限な 2 つの部分の面積が等しいとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $0<\alpha<\beta$ のとき $f(x)$ を求めよ。

(2) $\alpha<0<\beta$ のとき $f(x)$ を求めよ。

$f(x)=px^7(x-\alpha)(x-\beta)$ に対し，

$f'(x)=p\{7x^6(x-\alpha)(x-\beta)+x^7(x-\alpha)+x^7(x-\beta)\}$ となる。

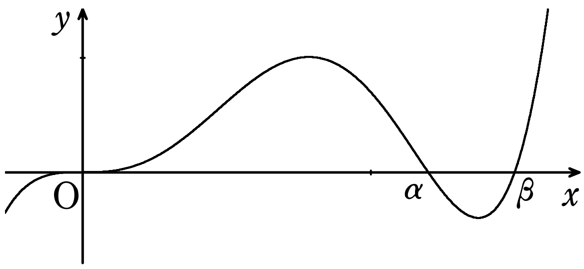
$f(x)$ が $x=1$ で極値1をとることから $\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(1-\alpha)(1-\beta)=1 \\ p\{7(1-\alpha)(1-\beta)+(1-\alpha)+(1-\beta)\}=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(1-\alpha)(1-\beta)=1 \\ 7p(1-\alpha)(1-\beta)+p\{(1-\alpha)+(1-\beta)\}=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} p(1-\alpha-\beta+\alpha\beta)=1 \\ 7+p(2-\alpha-\beta)=0 \end{cases} \quad \cdots ①$$

(1) $0<\alpha<\beta$ のとき

題意の条件が成り立つとすると $\int_0^\alpha f(x)\,dx=-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ すなわち $\int_0^\beta f(x)\,dx=0$



よって $\int_0^\beta f(x)\,dx=\int_0^\beta px^7(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$$=p\int_0^\beta \{x^9-(\alpha+\beta)x^8+\alpha\beta x^7\}\,dx$$

$$=p\left[\frac{x^{10}}{10}-\frac{(\alpha+\beta)x^9}{9}+\frac{\alpha\beta x^8}{8}\right]_0^\beta$$

$$=p\left\{\frac{\beta^{10}}{10}-\frac{(\alpha+\beta)\beta^9}{9}+\frac{\alpha\beta^9}{8}\right\}=0$$

$$\therefore \frac{\beta}{10}-\frac{\alpha+\beta}{9}+\frac{\alpha}{8}=0$$

$$\therefore \beta=\frac{5}{4}\alpha \quad \cdots ②$$

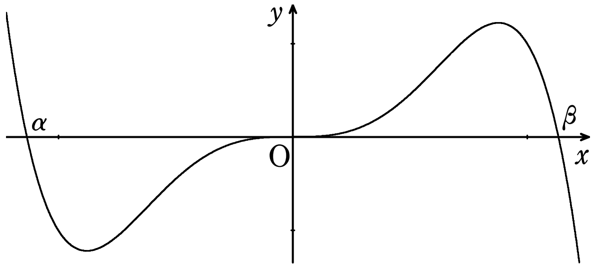
①，②より $(p,\ \alpha,\ \beta)=\left(10,\ \frac{6}{5},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(-98,\ \frac{6}{7},\ \frac{15}{14}\right)$

したがって，$f(x)=10x^7\left(x-\frac{6}{5}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$，$f(x)=-98x^7\left(x-\frac{6}{7}\right)\left(x-\frac{15}{14}\right)$

これらの $f(x)$ は $x=1$ で極値1を確かにとる。

(2) $\alpha<0<\beta$ のとき

題意の条件が成り立つとすると，$-\int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx=\int_{0}^{\beta} f(x)\,dx$　すなわち $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=0$



よって $\int_{0}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{0}^{\beta} px^7(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$$=p\int_{0}^{\beta}\{x^9-(\alpha+\beta)x^8+\alpha\beta x^7\}\,dx$$

$$=p\left[\frac{x^{10}}{10}-\frac{(\alpha+\beta)x^9}{9}+\frac{\alpha\beta x^8}{8}\right]_0^{\beta}$$

$$=p\left\{\frac{1}{10}\left(\beta^{10}-\alpha^{10}\right)-\frac{\alpha+\beta}{9}\left(\beta^9-\alpha^9\right)+\frac{\alpha\beta}{8}\left(\beta^8-\alpha^8\right)\right\}=0$$

$$\therefore\ \frac{1}{10}\left(\beta^{10}-\alpha^{10}\right)-\frac{\alpha+\beta}{9}\left(\beta^9-\alpha^9\right)+\frac{\alpha\beta}{8}\left(\beta^8-\alpha^8\right)=0$$

$$36\left(\beta^{10}-\alpha^{10}\right)-40(\alpha+\beta)\left(\beta^9-\alpha^9\right)+45\alpha\beta\left(\beta^8-\alpha^8\right)=0$$

$$36\beta^{10}-36\alpha^{10}-40\alpha\beta^9+40\alpha^{10}-40\beta^{10}+40\alpha^9\beta+45\alpha\beta^9-45\alpha^9\beta=0$$

$$4\alpha^{10}-4\beta^{10}+5\alpha\beta^9-5\alpha^9\beta=0$$

$$4\beta^{10}-4\alpha^{10}=5\alpha\beta^9-5\alpha^9\beta$$

$$\therefore\ 4\left(\beta^{10}-\alpha^{10}\right)=5\alpha\beta\left(\beta^8-\alpha^8\right)$$

$$\therefore\ 4\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(\beta^8+\alpha^2\beta^6+\alpha^4\beta^4+\alpha^6\beta^2+\alpha^8\right)=5\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(\beta^6+\alpha^2\beta^4+\alpha^4\beta^2+\alpha^6\right)$$

となる。

α と β は異符号であり $4\left(\beta^8+\alpha^2\beta^6+\alpha^4\beta^4+\alpha^6\beta^2+\alpha^8\right)=5\alpha\beta\left(\beta^6+\alpha^2\beta^4+\alpha^4\beta^2+\alpha^6\right)$

となることはない。よって，この式が成り立つのは $\beta^2-\alpha^2=0$，すなわち $\alpha+\beta=0$ $\cdots$③のとき。

①，③より $(p,\ \alpha,\ \beta)=\left(-\frac{7}{2},-\frac{3}{\sqrt{7}},\ \frac{3}{\sqrt{7}}\right)$

したがって，$f(x)=-\frac{7}{2}x^7\left(x^2-\frac{9}{7}\right)$

この $f(x)$ は $x=1$ で極値1を確かにとる。

[東京工業大学 1996 年前期 $\boxed{4}$]

関数 $f(x)$ は微分可能で次の(イ)，(ロ)，(ハ)を満たすものとする。

(イ) $x \geqq 0$ のとき $f'(x) > 0$，

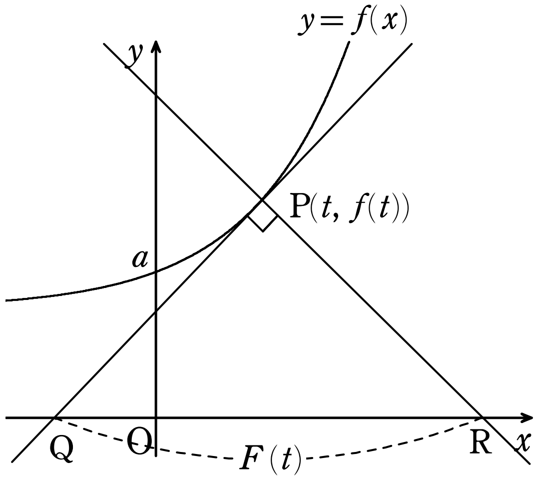
(ロ) $f(0) = a$ （ただし，$a > 1$），

(ハ) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t \geqq 0)$ における接線と x 軸との交点を Q，法線と x 軸との交点を R としたとき，線分 QR の長さ $F(t)$ は関係式 $\dfrac{F(t)}{f(t)} = \dfrac{f(t)}{f'(t)}$ を満たす。

このとき次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ で $f'(x)$ は単調増加で，$h > 0$ に対し，$f(x+h) - f(x) \geqq \sqrt{a-1}\,h$ を満たすことを示せ。

(2) 点 P が曲線 $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ 上を動くとき $F(t)$ の最小値を求めよ。



P における接線の方程式は $y - f(t) = f'(t)(x-t)$

$y = 0$ として $x - t = -\dfrac{f(t)}{f'(t)}$ より $x = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$

したがって $\mathrm{Q}\left(t - \dfrac{f(t)}{f'(t)},\ 0\right)$ …①

また，P における法線の方程式は

$$y - f(t) = -\frac{1}{f'(t)}(x-t)$$

$y = 0$ として $x - t = f'(t)f(t)$ より $x = t + f'(t)f(t)$

したがって $\mathrm{R}\left(t + f'(t)f(t),\ 0\right)$ …②

①，②より $F(t) = \{t + f'(t)f(t)\} - \left\{t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}\right\} = f'(t)f(t) + \dfrac{f(t)}{f'(t)}$ である。

両辺を $f(t)$ で割って $\dfrac{F(t)}{f(t)} = f'(t) + \dfrac{1}{f'(t)}$

題意の条件より $f'(t) + \dfrac{1}{f'(t)} = \dfrac{f(t)}{f'(t)}$

$$f(t) = \{f'(t)\}^2 + 1$$

$t \to x$ として $f(x) = \{f'(x)\}^2 + 1$

$f'(x) > 0$ より $f'(x) = \sqrt{f(x) - 1}$ …③ を得る。

(1) $h>0$ に対し， $f'(x+h)-f'(x)=\sqrt{f(x+h)-1}-\sqrt{f(x)-1}$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{\sqrt{f(x+h)-1}+\sqrt{f(x)-1}}$$

条件（イ）より $f(x)$ は $x\geqq 0$ において単調増加なので， $f(x+h)-f(x)>0$

よって　$f'(x+h)-f'(x)>0$

したがって， $f'(x)$ は $x>0$ において単調増加。

また， $f(x)$ は $0\leqq x\leqq h$ で連続， $0<x<h$ で微分可能であるから，平均値の定理より

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(\theta)$， $0<\theta<h$　をみたす実数 θ が存在する。

$f'(x)$ は $x>0$ で単調増加であるから， $f'(x)$ が $x\geqq 0$ で最小となるのは $x=0$ のときで

最小値は　$f'(0)=\sqrt{f(0)-1}=\sqrt{a-1}$　である。

したがって　$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqq\sqrt{a-1}$

よって， $h>0$ に対し， $f(x+h)-f(x)\geqq\sqrt{a-1}\,h$　が成り立つ。　（証明終）

(2) ③より　$F(t)=f(t)f'(t)+\dfrac{f(t)}{f'(t)}$

$$=f(t)\sqrt{f(t)-1}+\frac{f(t)}{\sqrt{f(t)-1}}$$

$$=f(t)\{f(t)-1\}^{\frac{1}{2}}+f(t)\{f(t)-1\}^{-\frac{1}{2}}$$

よって　$F'(t)=f'(t)\{f(t)-1\}^{\frac{1}{2}}+f(t)\cdot\dfrac{1}{2}\{f(t)-1\}^{-\frac{1}{2}}\cdot f'(t)$

$$+f'(t)\{f(t)-1\}^{-\frac{1}{2}}+f(t)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\{f(t)-1\}^{-\frac{3}{2}}\cdot f'(t)$$

$$=f'(t)\sqrt{f(t)-1}+\frac{f(t)f'(t)}{2\sqrt{f(t)-1}}+\frac{f'(t)}{\sqrt{f(t)-1}}-\frac{f(t)f'(t)}{2\{f(t)-1\}\sqrt{f(t)-1}}$$

$$=\frac{2f'(t)\{f(t)-1\}^2+f(t)f'(t)\{f(t)-1\}+2f'(t)\{f(t)-1\}-f(t)f'(t)}{2\{f(t)-1\}\sqrt{f(t)-1}}$$

$$=\frac{3\{f(t)\}^2f'(t)-4f(t)f'(t)}{2\{f(t)-1\}\sqrt{f(t)-1}}$$

$$=\frac{f(t)f'(t)\{3f(t)-4\}}{2\{f(t)-1\}\sqrt{f(t)-1}}$$

$F(t)$ の増減は右表に従う。

$f(t)$	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$F'(t)$	$-$	0	$+$
$F(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f(t) \geqq a\ (>1)$ であるから， a と $\frac{4}{3}$ の大小で最小値を場合分けする。

(i) $(1<)\,a<\frac{4}{3}$ のとき

$F(t)$ が最小となるのは $f(t)=\frac{4}{3}$ のときで,

最小値は， $F(t)\Big|_{f(t)=\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}-1}+\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3}-1}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{16\sqrt{3}}{9}$

(ii) $a \geqq \frac{4}{3}$ のとき

$F(t)$ が最小となるのは $f(t)=a$ のときで,

最小値は， $F(t)\Big|_{f(t)=a}=a\sqrt{a-1}+\frac{a}{\sqrt{a-1}}=\frac{a^2}{\sqrt{a-1}}$