[東京工業大学 1996 年前期 $\boxed{1}$]

2 以上の整数 n に対して方程式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 x_2 \cdots x_n$$

の正の整数解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ を考える。ただし, たとえば $(1,\ 2,\ 3)$ と $(3,\ 2,\ 1)$ は異なる解とみなす。このとき次の問に答えよ。

(1) $n=2$ および $n=3$ のときの解をすべて求めよ。

(2) 解が 1 つしかないような n をすべて求めよ。

(3) 任意の n に対して解は少なくとも 1 つ存在し，かつ有限個しかないことを示せ。

[東京工業大学 1996 年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

$p=\cos\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，$q,\ r,\ s$ を正数とする。また，行列 A を $A=\begin{pmatrix} p & -q \\ r & s \end{pmatrix}$ とする。

A で表される 1 次変換により，楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（ただし，$a,\ b>0$）上の点は C 上にうつるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 行列 A を $\theta,\ a,\ b$ を用いて表せ。

(2) 自然数 n に対し，A^n を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 1996 年前期 $\boxed{3}$]

関数 $f(x) = px^7(x-\alpha)(x-\beta)$ が $x=1$ で極値 1 をとり，さらに x 軸と曲線 $y = f(x)$ で囲まれ面積が有限な 2 つの部分の面積が等しいとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $0<\alpha<\beta$ のとき $f(x)$ を求めよ。

(2) $\alpha<0<\beta$ のとき $f(x)$ を求めよ。

[東京工業大学 1996 年前期 $\boxed{4}$]

関数 $f(x)$ は微分可能で次の(イ)，(ロ)，(ハ)を満たすものとする。

(イ) $x \geqq 0$ のとき $f'(x) > 0$，

(ロ) $f(0) = a$ （ただし，$a > 1$），

(ハ) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t \geqq 0)$ における接線と x 軸との交点を Q，法線と x 軸との交点を R としたとき，線分 QR の長さ $F(t)$ は関係式 $\dfrac{F(t)}{f(t)} = \dfrac{f(t)}{f'(t)}$ を満たす。

このとき次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ で $f'(x)$ は単調増加で，$h > 0$ に対し，$f(x+h) - f(x) \geqq \sqrt{a-1}\,h$ を満たすことを示せ。

(2) 点 P が曲線 $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ 上を動くとき $F(t)$ の最小値を求めよ。