[東京工業大学 1996 年前期 $\boxed{4}$]

関数 $f(x)$ は微分可能で次の(イ)，(ロ)，(ハ)を満たすものとする。

(イ) $x \geqq 0$ のとき $f'(x) > 0$，

(ロ) $f(0) = a$ （ただし，$a > 1$），

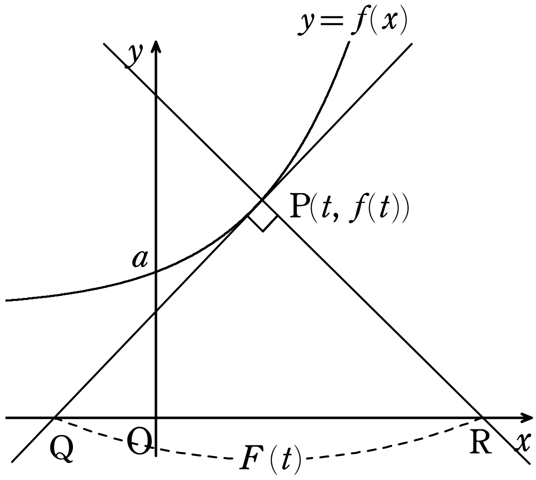
(ハ) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t \geqq 0)$ における接線と x 軸との交点を Q，法線と x 軸との交点を R としたとき，線分 QR の長さ $F(t)$ は関係式 $\dfrac{F(t)}{f(t)} = \dfrac{f(t)}{f'(t)}$ を満たす。

このとき次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ で $f'(x)$ は単調増加で，$h > 0$ に対し，$f(x+h) - f(x) \geqq \sqrt{a-1}\,h$ を満たすことを示せ。

(2) 点 P が曲線 $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ 上を動くとき $F(t)$ の最小値を求めよ。

P における接線の方程式は $y - f(t) = f'(t)(x - t)$



$y = 0$ として $x - t = -\dfrac{f(t)}{f'(t)}$ より $x = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$

したがって $\mathrm{Q}\left(t - \dfrac{f(t)}{f'(t)},\ 0\right)$ …①

また，P における法線の方程式は

$$y - f(t) = -\frac{1}{f'(t)}(x - t)$$

$y = 0$ として $x - t = f'(t)f(t)$ より $x = t + f'(t)f(t)$

したがって $\mathrm{R}\left(t + f'(t)f(t),\ 0\right)$ …②

①，②より $F(t) = \{t + f'(t)f(t)\} - \left\{t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}\right\} = f'(t)f(t) + \dfrac{f(t)}{f'(t)}$ である。

両辺を $f(t)$ で割って $\dfrac{F(t)}{f(t)} = f'(t) + \dfrac{1}{f'(t)}$

題意の条件より $f'(t) + \dfrac{1}{f'(t)} = \dfrac{f(t)}{f'(t)}$

$$f(t) = \{f'(t)\}^2 + 1$$

$t \to x$ として $f(x) = \{f'(x)\}^2 + 1$

$f'(x) > 0$ より $f'(x) = \sqrt{f(x) - 1}$ …③ を得る。

(1) $h>0$ に対し， $f'(x+h)-f'(x)=\sqrt{f(x+h)-1}-\sqrt{f(x)-1}$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{\sqrt{f(x+h)-1}+\sqrt{f(x)-1}}$$

条件（イ）より $f(x)$ は $x \geqq 0$ において単調増加なので， $f(x+h)-f(x)>0$

よって　$f'(x+h)-f'(x)>0$

したがって， $f'(x)$ は $x>0$ において単調増加。

また， $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq h$ で連続， $0<x<h$ で微分可能であるから，平均値の定理より

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(\theta)$， $0<\theta<h$　をみたす実数 θ が存在する。

$f'(x)$ は $x>0$ で単調増加であるから， $f'(x)$ が $x \geqq 0$ で最小となるのは $x=0$ のときで

最小値は　$f'(0)=\sqrt{f(0)-1}=\sqrt{a-1}$　である。

したがって　$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqq \sqrt{a-1}$

よって， $h>0$ に対し， $f(x+h)-f(x) \geqq \sqrt{a-1}\,h$　が成り立つ。　　（証明終）

(2) ③より　$F(t)=f(t)f'(t)+\dfrac{f(t)}{f'(t)}$

$$=f(t)\sqrt{f(t)-1}+\frac{f(t)}{\sqrt{f(t)-1}}$$

$$=f(t)\{f(t)-1\}^{\frac{1}{2}}+f(t)\{f(t)-1\}^{-\frac{1}{2}}$$

よって　$F'(t)=f'(t)\{f(t)-1\}^{\frac{1}{2}}+f(t)\cdot\dfrac{1}{2}\{f(t)-1\}^{-\frac{1}{2}}\cdot f'(t)$

$$+f'(t)\{f(t)-1\}^{-\frac{1}{2}}+f(t)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\{f(t)-1\}^{-\frac{3}{2}}\cdot f'(t)$$

$$=f'(t)\sqrt{f(t)-1}+\frac{f(t)f'(t)}{2\sqrt{f(t)-1}}+\frac{f'(t)}{\sqrt{f(t)-1}}-\frac{f(t)f'(t)}{2\{f(t)-1\}\sqrt{f(t)-1}}$$

$$=\frac{2f'(t)\{f(t)-1\}^2+f(t)f'(t)\{f(t)-1\}+2f'(t)\{f(t)-1\}-f(t)f'(t)}{2\{f(t)-1\}\sqrt{f(t)-1}}$$

$$=\frac{3\{f(t)\}^2f'(t)-4f(t)f'(t)}{2\{f(t)-1\}\sqrt{f(t)-1}}$$

$$= \frac{f(t)f'(t)\{3f(t)-4\}}{2\{f(t)-1\}\sqrt{f(t)-1}}$$

$F(t)$ の増減は右表に従う。

$f(t)$	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$F'(t)$	$-$	0	$+$
$F(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f(t) \geqq a\ (>1)$ であるから，a と $\frac{4}{3}$ の大小で最小値を場合分けする。

(i) $(1<)\,a<\frac{4}{3}$ のとき

$F(t)$ が最小となるのは $f(t)=\frac{4}{3}$ のときで，

最小値は，$F(t)\Big|_{f(t)=\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}-1}+\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3}-1}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$

(ii) $a \geqq \frac{4}{3}$ のとき

$F(t)$ が最小となるのは $f(t)=a$ のときで，

最小値は，$F(t)\Big|_{f(t)=a} = a\sqrt{a-1}+\frac{a}{\sqrt{a-1}} = \frac{a^2}{\sqrt{a-1}}$