[東京工業大学 1996 年前期 $\boxed{3}$]

関数 $f(x)=px^7(x-\alpha)(x-\beta)$ が $x=1$ で極値 1 をとり，さらに x 軸と曲線 $y=f(x)$ で囲まれ面積が有限な 2 つの部分の面積が等しいとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $0<\alpha<\beta$ のとき $f(x)$ を求めよ。

(2) $\alpha<0<\beta$ のとき $f(x)$ を求めよ。

$f(x)=px^7(x-\alpha)(x-\beta)$ に対し，

$f'(x)=p\{7x^6(x-\alpha)(x-\beta)+x^7(x-\alpha)+x^7(x-\beta)\}$ となる。

$f(x)$ が $x=1$ で極値1をとることから

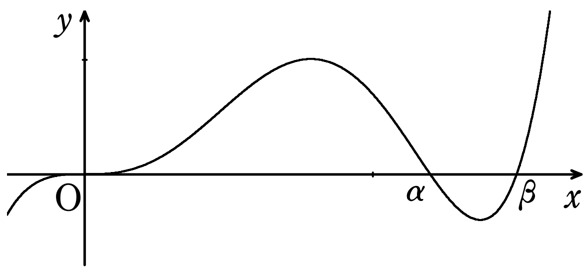
$$\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(1-\alpha)(1-\beta)=1 \\ p\{7(1-\alpha)(1-\beta)+(1-\alpha)+(1-\beta)\}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(1-\alpha)(1-\beta)=1 \\ 7p(1-\alpha)(1-\beta)+p\{(1-\alpha)+(1-\beta)\}=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} p(1-\alpha-\beta+\alpha\beta)=1 \\ 7+p(2-\alpha-\beta)=0 \end{cases} \quad \cdots①$$

(1) $0<\alpha<\beta$ のとき

題意の条件が成り立つとすると $\int_0^\alpha f(x)\,dx=-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ すなわち $\int_0^\beta f(x)\,dx=0$



よって $\int_0^\beta f(x)\,dx=\int_0^\beta px^7(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$$=p\int_0^\beta\{x^9-(\alpha+\beta)x^8+\alpha\beta x^7\}\,dx$$

$$=p\left[\frac{x^{10}}{10}-\frac{(\alpha+\beta)x^9}{9}+\frac{\alpha\beta x^8}{8}\right]_0^\beta$$

$$=p\left\{\frac{\beta^{10}}{10}-\frac{(\alpha+\beta)\beta^9}{9}+\frac{\alpha\beta^9}{8}\right\}=0$$

$$\therefore\ \frac{\beta}{10}-\frac{\alpha+\beta}{9}+\frac{\alpha}{8}=0$$

$$\therefore\ \beta=\frac{5}{4}\alpha \quad \cdots②$$

①，②より $(p,\alpha,\beta)=\left(10,\frac{6}{5},\frac{3}{2}\right),\left(-98,\frac{6}{7},\frac{15}{14}\right)$

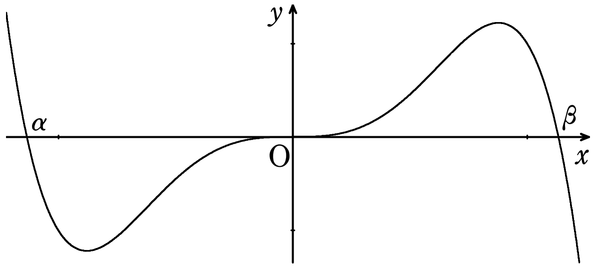
したがって，$f(x)=10x^7\left(x-\frac{6}{5}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$，$f(x)=-98x^7\left(x-\frac{6}{7}\right)\left(x-\frac{15}{14}\right)$

これらの $f(x)$ は $x=1$ で極値1を確かにとる。

(2) $\alpha<0<\beta$ のとき

題意の条件が成り立つとすると，$-\int_\alpha^0 f(x)\,dx=\int_0^\beta f(x)\,dx$ すなわち $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=0$

よって $\int_0^\beta f(x)\,dx=\int_0^\beta px^7(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$



$$=p\int_0^\beta\{x^9-(\alpha+\beta)x^8+\alpha\beta x^7\}\,dx$$

$$=p\left[\frac{x^{10}}{10}-\frac{(\alpha+\beta)x^9}{9}+\frac{\alpha\beta x^8}{8}\right]_0^\beta$$

$$=p\left\{\frac{1}{10}\left(\beta^{10}-\alpha^{10}\right)-\frac{\alpha+\beta}{9}\left(\beta^9-\alpha^9\right)+\frac{\alpha\beta}{8}\left(\beta^8-\alpha^8\right)\right\}=0$$

$$\therefore\ \frac{1}{10}\left(\beta^{10}-\alpha^{10}\right)-\frac{\alpha+\beta}{9}\left(\beta^9-\alpha^9\right)+\frac{\alpha\beta}{8}\left(\beta^8-\alpha^8\right)=0$$

$$36\left(\beta^{10}-\alpha^{10}\right)-40(\alpha+\beta)\left(\beta^9-\alpha^9\right)+45\alpha\beta\left(\beta^8-\alpha^8\right)=0$$

$$36\beta^{10}-36\alpha^{10}-40\alpha\beta^9+40\alpha^{10}-40\beta^{10}+40\alpha^9\beta+45\alpha\beta^9-45\alpha^9\beta=0$$

$$4\alpha^{10}-4\beta^{10}+5\alpha\beta^9-5\alpha^9\beta=0$$

$$4\beta^{10}-4\alpha^{10}=5\alpha\beta^9-5\alpha^9\beta$$

$$\therefore\ 4\left(\beta^{10}-\alpha^{10}\right)=5\alpha\beta\left(\beta^8-\alpha^8\right)$$

$$\therefore\ 4\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(\beta^8+\alpha^2\beta^6+\alpha^4\beta^4+\alpha^6\beta^2+\alpha^8\right)=5\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(\beta^6+\alpha^2\beta^4+\alpha^4\beta^2+\alpha^6\right)$$

となる。

α と β は異符号であり $4\left(\beta^8+\alpha^2\beta^6+\alpha^4\beta^4+\alpha^6\beta^2+\alpha^8\right)=5\alpha\beta\left(\beta^6+\alpha^2\beta^4+\alpha^4\beta^2+\alpha^6\right)$

となることはない。よって，この式が成り立つのは $\beta^2-\alpha^2=0$，すなわち $\alpha+\beta=0\ \cdots$③のとき。

①，③より $(p,\alpha,\beta)=\left(-\frac{7}{2},-\frac{3}{\sqrt{7}},\frac{3}{\sqrt{7}}\right)$

したがって，$f(x)=-\frac{7}{2}x^7\left(x^2-\frac{9}{7}\right)$

この $f(x)$ は $x=1$ で極値1を確かにとる。