[東京工業大学 1996 年前期 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$p=\cos\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とし，$q,\ r,\ s$を正数とする。また，行列$A$を$A=\begin{pmatrix} p & -q \\ r & s \end{pmatrix}$とする。

Aで表される 1 次変換により，楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（ただし，$a,\ b>0$）上の点は$C$上にうつるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 行列Aを$\theta,\ a,\ b$を用いて表せ。

(2) 自然数nに対し，A^nを求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) C上の点$(a,\ 0)$のAによる像は $\begin{pmatrix} p & -q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap \\ ar \end{pmatrix}$ より $(ap,\ ar)$

これがC上にあることから $\dfrac{(ap)^2}{a^2}+\dfrac{(ar)^2}{b^2}=1$

$$p^2+\frac{a^2r^2}{b^2}=1$$

$$a^2r^2=b^2(1-p^2)$$

$$r^2=\frac{b^2}{a^2}(1-p^2)$$

$$=\frac{b^2}{a^2}(1-\cos^2\theta)$$

$$=\frac{b^2}{a^2}\sin^2\theta$$

$r>0$ より $\quad r=\dfrac{b}{a}\sin\theta$

また，点$(0,\ b)$のAによる像は $\begin{pmatrix} p & -q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -bq \\ bs \end{pmatrix}$ より $(-bq,\ bs)$

これがC上にあることから $\dfrac{(-bq)^2}{a^2}+\dfrac{(bs)^2}{b^2}=1$

$$\frac{b^2q^2}{a^2}+s^2=1$$

$$b^2q^2+a^2s^2=a^2\cdots①$$

さらに，C上の点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}a,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}b\right)$の$A$による像は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} p & -q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ap-bq) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ar+bs) \end{pmatrix}$より

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(ap-bq),\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ar+bs)\right)$ これがC上にあることから

$$b^2\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(ap-bq)\right\}^2+a^2\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(ar+bs)\right\}^2=a^2b^2$$

$$b^2(a^2p^2-2abpq+b^2q^2)+a^2(a^2r^2+2abrs+b^2s^2)=2a^2b^2$$

$p=\cos\theta,\ r=\dfrac{b}{a}\sin\theta$ を代入して

$$b^2(a^2\cos^2\theta-2abq\cos\theta+b^2q^2)+a^2(b^2\sin^2\theta+2b^2s\sin\theta+b^2s^2)=2a^2b^2$$

b^2 で割って

$$a^2\cos^2\theta-2abq\cos\theta+b^2q^2+a^2\sin^2\theta+2a^2s\sin\theta+a^2s^2=2a^2$$

①より　$b^2q^2=a^2-a^2s^2$　として代入すると

$$\underline{a^2\cos^2\theta}-2abq\cos\theta\underline{\underline{+b^2q^2}}\ \underline{+a^2\sin^2\theta}+2a^2s\sin\theta+a^2s^2=2a^2$$

$$\underline{a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}-2abq\cos\theta\underline{\underline{+a^2-a^2s^2}}+2a^2s\sin\theta+a^2s^2-2a^2=0$$

$$-2abq\cos\theta+2a^2s\sin\theta=0$$

$$bq\cos\theta=as\sin\theta$$

$$\therefore\ bq=as\tan\theta\ \cdots ②$$

①に代入して　$a^2s^2\tan^2\theta+a^2s^2=a^2$

$$(1+\tan^2\theta)s^2=1$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}s^2=1$$

$$s^2=\cos^2\theta$$

$s>0$ より　$s=\cos\theta$

したがって，②より　$bq=a\cdot\cos\theta\cdot\tan\theta$

$$q=\frac{a}{b}\sin\theta$$

よって　$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\dfrac{a}{b}\sin\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(2)

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\frac{a}{b}\sin\theta \\ \frac{b}{a}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$ に対し，ケーリー・ハミルトンの恒等式より

$$A^2-(\cos\theta+\cos\theta)A+\left(\cos\theta\cdot\cos\theta-\left(-\frac{a}{b}\sin\theta\right)\cdot\frac{b}{a}\sin\theta\right)=O$$

$\therefore\quad A^2-2\cos\theta A+E=O$　ただし，E は単位行列，O は零行列である。

したがって　$A^2=2\cos\theta A-E$

$$=2\cos\theta\begin{pmatrix}\cos\theta & -\frac{a}{b}\sin\theta \\ \frac{b}{a}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\cos^2\theta-1 & -\frac{a}{b}\cdot 2\sin\theta\cos\theta \\ \frac{b}{a}\cdot 2\sin\theta\cos\theta & 2\cos^2\theta-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\frac{a}{b}\sin 2\theta \\ \frac{b}{a}\sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}$$

となる。

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\frac{a}{b}\sin n\theta \\ \frac{b}{a}\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$ と推定できるので，この推定が正しいことを数学的帰納法で証明する。

(ｉ) $n=1$ のとき

$$A^1=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\frac{a}{b}\sin\theta \\ \frac{b}{a}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$ より成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき

$$A^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\dfrac{a}{b}\sin k\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}$$ であると仮定する。

このとき，　$A^{k+1}=A^k\cdot A$

$$=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\dfrac{a}{b}\sin k\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\dfrac{a}{b}\sin\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta & -\dfrac{a}{b}\sin\theta\cos k\theta-\dfrac{a}{b}\cos\theta\sin k\theta \\ \dfrac{a}{b}\sin\theta\cos k\theta+\dfrac{a}{b}\cos\theta\sin k\theta & \cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(k\theta+\theta) & -\dfrac{a}{b}\sin(\theta+k\theta) \\ \dfrac{a}{b}\sin(\theta+k\theta) & \cos(k\theta+\theta)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta & -\dfrac{a}{b}\sin(k+1)\theta \\ \dfrac{a}{b}\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{pmatrix}$$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

（ i ），（ii）より　$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\dfrac{a}{b}\sin n\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$