[東京工業大学 1996 年前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

2 以上の整数 n に対して方程式

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1x_2\cdots x_n$$

の正の整数解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ を考える。ただし，たとえば $(1,\ 2,\ 3)$ と $(3,\ 2,\ 1)$ は異なる解とみなす。このとき次の問に答えよ。

(1) $n=2$ および $n=3$ のときの解をすべて求めよ。

(2) 解が 1 つしかないような n をすべて求めよ。

(3) 任意の n に対して解は少なくとも 1 つ存在し，かつ有限個しかないことを示せ。

☆ ☆

(1) $n=2$ のとき

$x_1+x_2=x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)=1$

$x_1,\ x_2$ は正の整数であるから $(x_1-1,\ x_2-1)=(1,\ 1)$

よって $(x_1,\ x_2)=(2,\ 2)$

$n=3$ のとき

$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$ として考える。

方程式 $x_1+x_2+x_3=x_1x_2x_3$ において

$x_2,\ x_3 \to x_1$ とすると $x_1+x_2+x_3 \leqq 3x_3$

$x_2 \to x_1$ とすると $x_1+x_2+x_3 \geqq x_1x_1x_3$ となるので

$x_1x_1x_3 \leqq 3x_3$ すなわち $x_1{}^2 \leqq 3$ となることがわかる。しかがって $x_1=1$

このとき，$1+x_2+x_3=1\cdot x_2x_3 \Leftrightarrow (x_2-1)(x_3-1)=2$

$x_2,\ x_3$ は正の整数であるから $(x_2,\ x_3)=(2,\ 3)$

$x_1,\ x_2,\ x_3$ を並び替えたものもすべて解になるので，求める解は

$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,1,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)$

(2) $x_1=x_2=\cdots=x_n$ を満たさない解が 1 つでも存在すれば，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ を並び替えることにより他の解が存在することになるので，題意を満たさない。

よって $x_1=x_2=\cdots=x_n$ として自然数 x についての方程式 $nx=x^n$ すなわち $x^{n-1}=n$ を考える。

与えられた方程式の解が 1 つしか存在しないために，これがただ 1 つの解をもつことが必要である。そのためには $n=2$ でなければならない。

実際，$n \geqq 3$ であるとすると，

任意の自然数 $x \geqq 2$ に対し，$x^{n-1} > n$，

$x = 1$ に対し，$x^{n-1} < n$　となることから

$x^{n-1} = n$ は成り立たない。

一方，$n = 2$ のときは，$x^{n-1} = n$ は $x = 2$ を唯一の解としてもつ。

逆に $n = 2$ のとき，(1)より確かにただ 1 つの解をもつ。

よって求める n は $n = 2$ のみ。

(3)　(ⅰ) [解の存在について]

$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1$，$x_{n-1} = 2$，$x_n = n$　とすると

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-2\ \text{個}} + 2 + n = 2n$$

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-2} x_{n-1} x_n = \underbrace{1\times1\times\cdots\times1}_{n-2\ \text{個}} \times 2 \times n = 2n$$

となるので，この $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ は解の 1 つになっている。

(ⅱ) [解の有限性について]

$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ が $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ …（＊）を満たすとすると

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq n x_n$

$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n \geqq x_{n-1} x_n$

であるから，$x_{n-1} x_n \leqq n x_n$ したがって $x_{n-1} \leqq n$ であることが必要である。

$1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{n-1} \leqq n$ より，整数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$ のとりうる値の可能性は有限個である。

ところで，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$ の値が決まれば，与えられた方程式

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$　は（$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$ の場合を除いて）

x_n についての 1 次方程式であるから，これを満たす正の整数 x_n は高々1 つである。

$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$ のときは，与式が $n + 1 + x_n = x_n$ となり解が存在しないので，

（＊）を満たす解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ は，存在しても有限個である。条件（＊）を外しても，解の個数は高々 $n!$ 倍になるだけである。

(ⅰ)(ⅱ)より，題意は示された。

（証明終）

〔参考〕

(1)は不定方程式の問題。$n=2$ のときは，「積＝定数」の形に変形。

$n=3$ のときは，不等式を評価して x_1 のとりうる値の範囲を絞っている。

(2)は，「$x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1x_2\cdots x_n$ を満たす自然数の組 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ がただ 1 つ存在する」ために「$nx=x^n$ を満たす自然数 x がただ 1 つ存在する」ことが必要という論理である。

(3)は，まず解の具体例を構成して示すことにより「存在」を証明し，その後，解が有限な領域に含まれることを示すことにより「有限性」を証明している。