[東京工業大学 1995 年後期 $\boxed{1}$]

一辺の長さが 2 の立方体Cがある。S_0をCの 6 つの面に内接する球とする。次にS_0に外接し，Cの 3 つの面と内接する球S_1を取る。S_1に外接し，Cの 3 つの面に内接する球S_2をS_1の外側に（S_0と反対側に）取る。以下帰納的に，$S_0, \cdots, S_n$まで取れたとして，S_nに外接し，Cの 3 つの面に内接する球S_{n+1}をS_nの外側に取る。

(1) S_nの半径をnの式で表せ。

(2) 立方体Cの中でどのS_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ にも含まれない部分の体積を求めよ。

(1) S_nの半径をr_n，中心をO_nとおく。

立方体を上面・下面の正方形の対角線を通るように半分に切断すると，各球の中心はこの断面上にあり，図のような関係になっている。H_nはこの断面上の点であり，$O_nH_n \perp O_{n+1}H_n$を満たす。

図の三角形において，正方形の 1 辺と対角線の辺の比が$1:\sqrt{2}$であること，さらに相似の関係から$O_nH_n : O_{n+1}H_n = 1:\sqrt{2}$ であり，したがって$O_nH_n : O_{n+1}O_n = 1:\sqrt{3}$となっている。

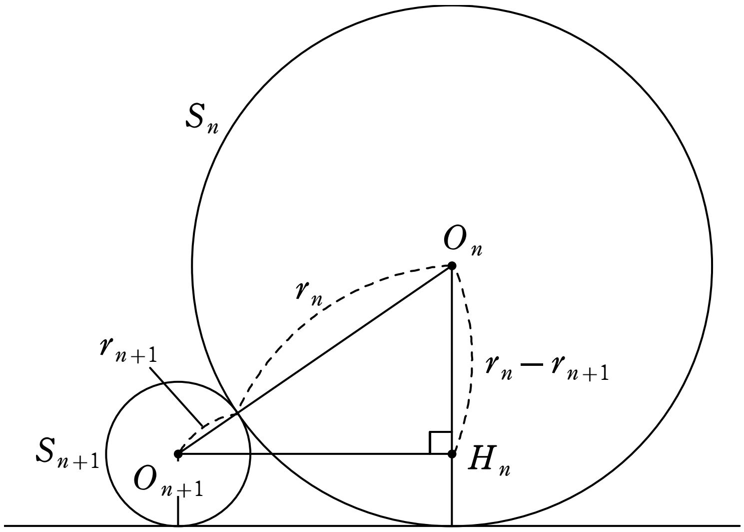
よって，$(r_n - r_{n+1}) : (r_n + r_{n+1}) = 1:\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \quad r_n + r_{n+1} = \sqrt{3}(r_n - r_{n+1})$$

$$\therefore r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} r_n \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

よって，$\{r_n\}$は等比数列で$r_0 = 1$であるから

$$r_n = r_0 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^n = \left(2-\sqrt{3}\right)^n$$



(2) 求める体積をVとすると

$$V = 2^3 - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{3}\pi {r_k}^3$$

ここで，
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{3}\pi {r_k}^3 = \frac{4}{3}\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}{r_k}^3$$
$$= \frac{4}{3}\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^3\right\}^k$$

$0<\left(2-\sqrt{3}\right)^3<1$ であるから，無限等比級数 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^3\right\}^k$ は収束し，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^3\right\}^k = \dfrac{1}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)^3} = \dfrac{1}{1-(26-15\sqrt{3})} = \dfrac{1}{-25+15\sqrt{3}}$ となる。

よって，$V = 8-\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{1}{-25+15\sqrt{3}} = 8-\dfrac{10+6\sqrt{3}}{15}\pi$

[東京工業大学 1995 年後期 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

だ円$C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a\geqq 1)$ が与えられている。

(1) C の外部の点$\mathrm{P}(X,Y)$からCへの 2 接線が直交するように P を動かす。 P の軌跡を求めよ。

(2) S を(1)で求めた P の軌跡とする。S と C で囲まれた部分を直線$x=2a$を軸として回転してできる回転体の体積を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $P(X, Y)$ を通る傾き m の直線の方程式は $y=m(x-X)+Y$ とおける。

だ円Cの式と連立して $\dfrac{x^2}{a^2}+(mx-mX+Y)^2=1$ より

$$\left(\frac{1}{a^2}+m^2\right)x^2+2m(Y-mX)x+(Y-mX)^2-1=0$$

直線とだ円は接していることからこの x の 2 次方程式の判別式について

$$m^2(Y-mX)^2-\left(\frac{1}{a^2}+m^2\right)\{(Y-mX)^2-1\}=0$$ が成り立つ。

m について整理して $\left(1-\dfrac{X^2}{a^2}\right)m^2+\dfrac{2XY}{a^2}m+\dfrac{1}{a^2}(1-Y^2)=0$

この m についての 2 次方程式の 2 解を$m_1,\ m_2$とおくと

解と係数の関係，および 2 接線が直交することから

$$m_1m_2=\frac{\dfrac{1}{a^2}(1-Y^2)}{1-\dfrac{X^2}{a^2}}=\frac{1-Y^2}{a^2-X^2}=-1 \quad (a^2-X^2\neq 0)$$

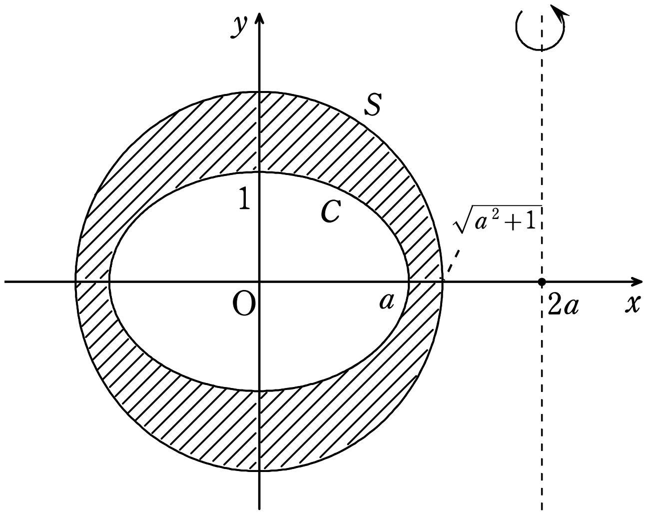
したがって， $X^2+Y^2=a^2+1$ を得る。ここで， $X^2=a^2$であるときの

$(X, Y)=(a, 1), (a, -1), (-a, 1), (-a, -1)$ についても題意は満たされるが，

これらはすべて $X^2+Y^2=a^2+1$ 上の点である。

したがって求める軌跡は，円$X^2+Y^2=a^2+1$

(2) 求める体積をVとする。



$$V=\left\{\int_{-\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{a^2+1}}\pi\left(2a+\sqrt{a^2+1-y^2}\right)^2\,dy-\int_{-\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{a^2+1}}\pi\left(2a-\sqrt{a^2+1-y^2}\right)^2\,dy\right\}$$

$$-\left\{\int_{-1}^{1}\pi\left(2a+\sqrt{a^2-a^2y^2}\right)^2\,dy-\int_{-1}^{1}\pi\left(2a-\sqrt{a^2-a^2y^2}\right)^2\,dy\right\}$$

$$=\pi\left\{\int_{-\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{a^2+1}}\left(2a+\sqrt{a^2+1-y^2}\right)^2-\left(2a-\sqrt{a^2+1-y^2}\right)^2dy\right\}$$

$$-\pi\left\{\int_{-1}^{1}\left(2a+\sqrt{a^2-a^2y^2}\right)^2-\left(2a-\sqrt{a^2-a^2y^2}\right)^2dy\right\}$$

$$=\pi\left\{\int_{-\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{a^2+1}}4a\cdot 2\sqrt{a^2+1-y^2}\,dy\right\}-\left\{\int_{-1}^{1}4a\cdot 2\sqrt{a^2-a^2y^2}\,dy\right\}$$

$$=8\pi a\left(\int_{-\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{a^2+1-y^2}\,dy-\int_{-1}^{1}\sqrt{a^2-a^2y^2}\,dy\right)$$

ここで，$\displaystyle\int_{-\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{a^2+1-y^2}\,dy$ は半径$\sqrt{a^2+1}$の円の面積の半分，

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{a^2-a^2y^2}\,dy$ は長軸の長さが$2a$，短軸の長さが2のだ円の面積の半分なので

$$V=8\pi a\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{a^2+1}^{\,2}-\frac{1}{2}\pi\cdot a\cdot 1\right)=4\pi^2a(a^2-a+1)$$