[東京工業大学 1995 年後期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

だ円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a\geqq 1)$ が与えられている。

(1) C の外部の点 $\mathrm{P}(X, Y)$ から C への 2 接線が直交するように P を動かす。P の軌跡を求めよ。

(2) S を(1)で求めた P の軌跡とする。S と C で囲まれた部分を直線 $x=2a$ を軸として回転してできる回転体の体積を求めよ。

☆ ☆

(1) $P(X,\ Y)$ を通る傾き m の直線の方程式は $y=m(x-X)+Y$ とおける。

だ円 C の式と連立して $\dfrac{x^2}{a^2}+(mx-mX+Y)^2=1$ より

$$\left(\frac{1}{a^2}+m^2\right)x^2+2m(Y-mX)x+(Y-mX)^2-1=0$$

直線とだ円は接していることからこの x の 2 次方程式の判別式について

$$m^2(Y-mX)^2-\left(\frac{1}{a^2}+m^2\right)\{(Y-mX)^2-1\}=0$$ が成り立つ。

m について整理して $\left(1-\dfrac{X^2}{a^2}\right)m^2+\dfrac{2XY}{a^2}m+\dfrac{1}{a^2}(1-Y^2)=0$

この m についての 2 次方程式の 2 解を $m_1,\ m_2$ とおくと

解と係数の関係，および 2 接線が直交することから

$$m_1m_2=\frac{\dfrac{1}{a^2}(1-Y^2)}{1-\dfrac{X^2}{a^2}}=\frac{1-Y^2}{a^2-X^2}=-1 \quad (a^2-X^2\neq 0)$$

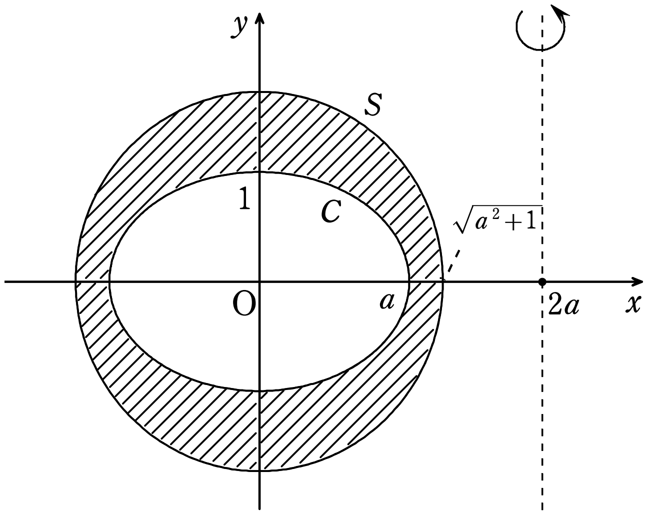
したがって，$X^2+Y^2=a^2+1$ を得る。ここで，$X^2=a^2$ であるときの

$(X,\ Y)=(a,\ 1),\ (a,\ -1),\ (-a,\ 1),\ (-a,\ -1)$ についても題意は満たされるが，

これらはすべて $X^2+Y^2=a^2+1$ 上の点である。

したがって求める軌跡は，円 $X^2+Y^2=a^2+1$

(2) 求める体積をVとする。



$$V=\left\{\int_{-\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{a^2+1}}\pi\left(2a+\sqrt{a^2+1-y^2}\right)^2\,dy-\int_{-\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{a^2+1}}\pi\left(2a-\sqrt{a^2+1-y^2}\right)^2\,dy\right\}$$

$$-\left\{\int_{-1}^{1}\pi\left(2a+\sqrt{a^2-a^2y^2}\right)^2\,dy-\int_{-1}^{1}\pi\left(2a-\sqrt{a^2-a^2y^2}\right)^2\,dy\right\}$$

$$=\pi\left\{\int_{-\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{a^2+1}}\left(2a+\sqrt{a^2+1-y^2}\right)^2-\left(2a-\sqrt{a^2+1-y^2}\right)^2dy\right\}$$

$$-\pi\left\{\int_{-1}^{1}\left(2a+\sqrt{a^2-a^2y^2}\right)^2-\left(2a-\sqrt{a^2-a^2y^2}\right)^2dy\right\}$$

$$=\pi\left\{\int_{-\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{a^2+1}}4a\cdot2\sqrt{a^2+1-y^2}dy\right\}-\left\{\int_{-1}^{1}4a\cdot2\sqrt{a^2-a^2y^2}dy\right\}$$

$$=8\pi a\left(\int_{-\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{a^2+1-y^2}dy-\int_{-1}^{1}\sqrt{a^2-a^2y^2}dy\right)$$

ここで，$\int_{-\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{a^2+1-y^2}dy$ は半径 $\sqrt{a^2+1}$ の円の面積の半分,

$\int_{-1}^{1}\sqrt{a^2-a^2y^2}dy$ は長軸の長さが $2a$，短軸の長さが 2 のだ円の面積の半分なので

$$V=8\pi a\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{a^2+1}^2-\frac{1}{2}\pi\cdot a\cdot1\right)=4\pi^2a(a^2-a+1)$$