[東京工業大学 1995 年後期 $\boxed{1}$]

一辺の長さが 2 の立方体 C がある。S_0 を C の 6 つの面に内接する球とする。次に S_0 に外接し，C の 3 つの面と内接する球 S_1 を取る。S_1 に外接し，C の 3 つの面に内接する球 S_2 を S_1 の外側に（S_0 と反対側に）取る。以下帰納的に，$S_0, \cdots, S_n$ まで取れたとして，S_n に外接し，C の 3 つの面に内接する球 S_{n+1} を S_n の外側に取る。

(1) S_n の半径を n の式で表せ。

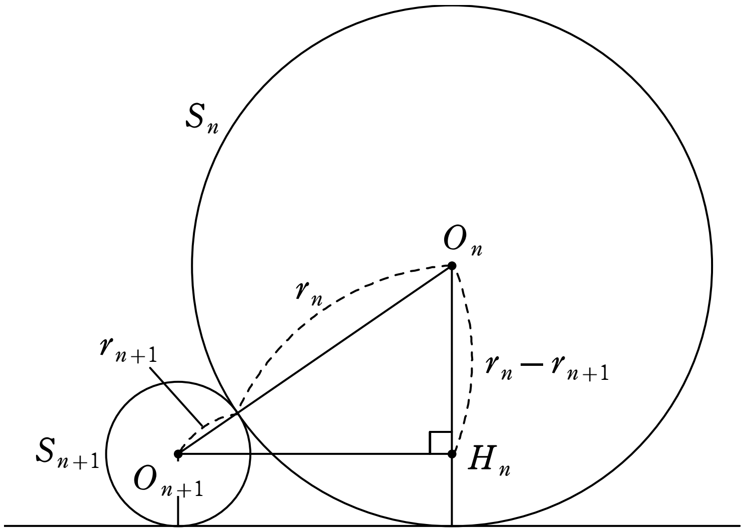
(2) 立方体 C の中でどの S_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ にも含まれない部分の体積を求めよ。

---

(1) S_n の半径を r_n，中心を O_n とおく。

立方体を上面・下面の正方形の対角線を通るように半分に切断すると，各球の中心はこの断面上にあり，図のような関係になっている。H_n はこの断面上の点であり，$O_nH_n \perp O_{n+1}H_n$ を満たす。

図の三角形において，正方形の 1 辺と対角線の辺の比が $1:\sqrt{2}$ であること，さらに相似の関係から $O_nH_n : O_{n+1}H_n = 1:\sqrt{2}$ であり，したがって $O_nH_n : O_{n+1}O_n = 1:\sqrt{3}$ となっている。



よって，$(r_n - r_{n+1}):(r_n + r_{n+1}) = 1:\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \quad r_n + r_{n+1} = \sqrt{3}(r_n - r_{n+1})$$

$$\therefore r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} r_n \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

よって，$\{r_n\}$ は等比数列で $r_0 = 1$ であるから

$$r_n = r_0 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^n = \left(2-\sqrt{3}\right)^n$$

(2) 求める体積を V とすると

$$V = 2^3 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{3}\pi {r_k}^3$$

ここで，$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{3}\pi {r_k}^3 = \frac{4}{3}\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} {r_k}^3$

$$= \frac{4}{3}\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}^3$$

$$=\frac{4}{3}\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^3\right\}^k$$

$0<\left(2-\sqrt{3}\right)^3<1$ であるから，無限等比級数 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^3\right\}^k$ は収束し，

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^3\right\}^k=\frac{1}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)^3}=\frac{1}{1-(26-15\sqrt{3})}=\frac{1}{-25+15\sqrt{3}}$ となる。

よって，$V=8-\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{-25+15\sqrt{3}}=8-\frac{10+6\sqrt{3}}{15}\pi$