［ 東京工業大学 1995 年前期 $\boxed{1}$ ］

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して数列 $a(n)=\dfrac{(n+2)(n+3)(n+4)}{n!}$ を考える。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a(n)$ を求めよ。

(2) $a(n)$ が整数となる n をすべて求めよ。

(3) 積 $a(1)\,a(2)\cdots a(n)$ が整数となる n をすべて求めよ。

---

(1) 十分大きな自然数 n に対し， $n!=n(n-1)(n-2)\times(n-3)!$

よって $a(n)=\dfrac{(n+2)(n+3)(n+4)}{n(n-1)(n-2)}\times\dfrac{1}{(n-3)!}$ となる。

ここで， $\dfrac{(n+2)(n+3)(n+4)}{n(n-1)(n-2)}=\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)\left(1+\dfrac{4}{n}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}\to 1 \quad (n\to\infty)$

$\dfrac{1}{(n-3)!}\to 0 \quad (n\to\infty)$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a(n)=0$ である。

(2) $a(1)=\dfrac{3\cdot4\cdot5}{1!}=60$， $a(2)=\dfrac{4\cdot5\cdot6}{2!}=60$， $a(3)=\dfrac{5\cdot6\cdot7}{3!}=35$， $a(4)=\dfrac{6\cdot7\cdot8}{4!}=14$，

$a(5)=\dfrac{7\cdot8\cdot9}{5!}=\dfrac{21}{5}$， $a(6)=\dfrac{8\cdot9\cdot10}{6!}=1$ であるから $n\leqq 6$ の範囲では $a(n)$ が整数になるのは

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$ のときである。

また， $n\geqq 7$ では $0<a(n)<1$ であるので $a(n)$ が整数になることはない。

このことを数学的帰納法により示す。

(ⅰ) $n=7$ のとき， $a(7)=\dfrac{9\cdot10\cdot11}{7!}=\dfrac{11}{56}$ より $0<a(7)<1$ である。

(ⅱ) $n=k$ のとき， $0<a(k)=\dfrac{(k+2)(k+3)(k+4)}{k!}<1$ であるとする。

このとき， $a(k+1)=\dfrac{(k+3)(k+4)(k+5)}{(k+1)!}$

$$=\frac{k+2}{k+2}\cdot\frac{(k+3)(k+4)(k+5)}{(k+1)k!}$$

$$=\frac{k+5}{(k+2)(k+1)}\cdot\frac{(k+2)(k+3)(k+4)}{k!}$$

$$=\frac{k+5}{(k+2)(k+1)}\cdot a(k)$$ である。

ここで，$k\geqq 7$ のときは $(k+2)(k+1)-(k+5)=k^2+2k-3$

$$=(k+1)^2-4$$

$$\geqq (7+1)^2-4>0$$

であるから $0<\dfrac{k+5}{(k+2)(k+1)}<1$ なので，$0<a(k+1)<1$ が成り立つ。

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

(ⅰ)(ⅱ)から数学的帰納法により $n\geqq 7$ では $0<a(n)<1$ である。

よって，求める n は $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$

(3) $p_n=a(1)\cdot a(2)\cdots\cdots a(n)\quad (n=1,2,3,\cdots)$ とおくと，$\{p_n\}$ は(2)より各項正で $n\geqq 7$ では減少する。

また，(2)の計算結果より $n\leqq 6$ では p_n は整数である。

$n\geqq 7$ での p_n を求めてみると

$$p_7=p_6\cdot a(7)=60\cdot 60\cdot 35\cdot 14\cdot\frac{21}{5}\cdot 1\cdot a(7)=2^5\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot\frac{9\cdot 10\cdot 11}{7!}=2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11$$

$$p_8=p_7\cdot a(8)=2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 12}{8!}=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11^2}{2^2}$$

$$p_9=p_8\cdot a(9)=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11^2}{2^2}\cdot\frac{11\cdot 12\cdot 13}{9!}=\frac{5\cdot 11^3\cdot 13}{2^7\cdot 3}$$

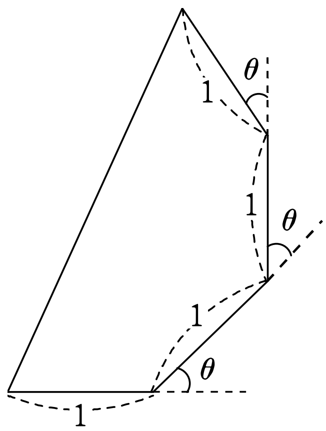
$$p_{10}=p_9\cdot a(10)=\frac{5\cdot 11^3\cdot 13}{2^7\cdot 3}\cdot\frac{12\cdot 13\cdot 14}{10!}=\frac{11^3\cdot 13^2}{2^{12}\cdot 3^4\cdot 5}<1$$

となることから，$n\geqq 7$ の範囲で p_n が整数になるのは $n=7$ のみである。

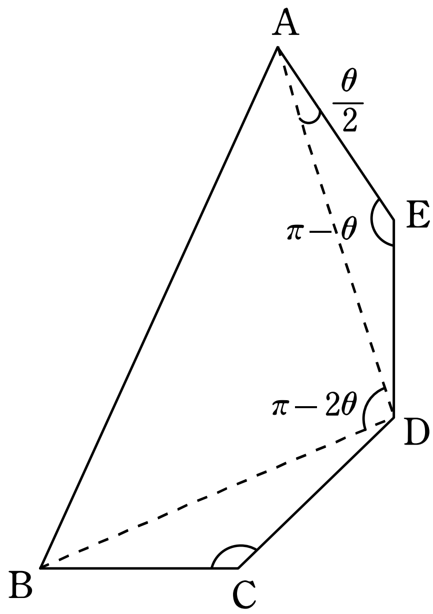
よって，求める n は $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,5,\ 6,\ 7$ である。

[東京工業大学 1995 年前期 $\boxed{2}$]

右図のような 4 辺の長さ 1 で，それらのなす角が $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるような五角形の面積の最大値を求めよ。



右図のように，五角形の頂点を A, B, C, D, E とおく。



このとき，△AED と△DCB は合同であり，

$\angle\mathrm{AED}=\angle\mathrm{DCB}=\pi-\theta$ である。

また，$\angle\mathrm{ADE}=\dfrac{\theta}{2}$ より $\angle ADB=\pi-\theta-\dfrac{\theta}{2}\times 2=\pi-2\theta$ であり，

$\mathrm{AD}=2\mathrm{AE}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$ である。

五角形を「頂角が $\pi-\theta$ で，等辺が 1」の 2 つの三角形と

「頂角が $\pi-2\theta$ で，等辺が $2\cos\dfrac{\theta}{2}$ 」の三角形に分けて

面積を求める。五角形の面積を S とおくと

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\pi-\theta)\times 2+\frac{1}{2}\cdot\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\cdot\sin(\pi-2\theta)=\sin\theta+(1+\cos\theta)\sin 2\theta$$ となる。

$$\frac{dS}{d\theta}=\cos\theta-\sin\theta\cdot\sin 2\theta+(1+\cos\theta)\cdot 2\cos 2\theta$$

$$=\cos\theta-\sin\theta\cdot(2\sin\theta\cos\theta)+2(1+\cos\theta)\cdot(2\cos^2\theta-1)$$

$$=\cos\theta-2\sin^2\theta\cdot\cos\theta+2(1+\cos\theta)\cdot(2\cos^2\theta-1)$$

$$=\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cdot\cos\theta+2(1+\cos\theta)\cdot(2\cos^2\theta-1)$$

$$=6\cos^3\theta+4\cos^2\theta-3\cos\theta-2$$

$$=(3\cos\theta+2)\left(\sqrt{2}\cos\theta+1\right)\left(\sqrt{2}\cos\theta-1\right)$$ となり

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\dfrac{dS}{d\theta}=0$ となるのは $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のみ。

S の増減は下表に従う。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

よって求める面積の最大値は $S\big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \sin\dfrac{\pi}{4} + \left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\dfrac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 1+\sqrt{2}$$

[東京工業大学 1995 年前期 $\boxed{3}$]

n を自然数とする。

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{n^2}+e^{2x}-1$ の増減を調べ，グラフの概形をえがけ。

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{n^2}+n^2y^2=1$ と曲線 $y=\dfrac{1}{n}e^x$ の交点のうち $\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right)$ でない方の座標を $(x_n,\ y_n)$ とおく。

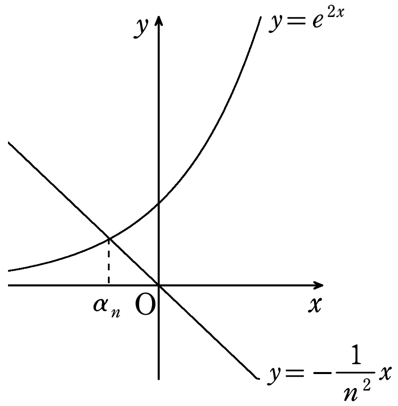
このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=-1$ であることを示せ。

---

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{n^2}+e^{2x}-1$ より $f'(x)=\dfrac{2x}{n^2}+2e^{2x}$， $f''(x)=\dfrac{2}{n^2}+4e^{2x}$ である。

$f'(x)=0$ となるのは $\dfrac{2x}{n^2}+2e^{2x}=0$ より $e^{2x}=-\dfrac{1}{n^2}x$

単調増加な $y=e^{2x}$ と単調減少な $y=-\dfrac{1}{n^2}x$ の 2 つのグラフは，図のように $x=\alpha_n<0$ で交わる。



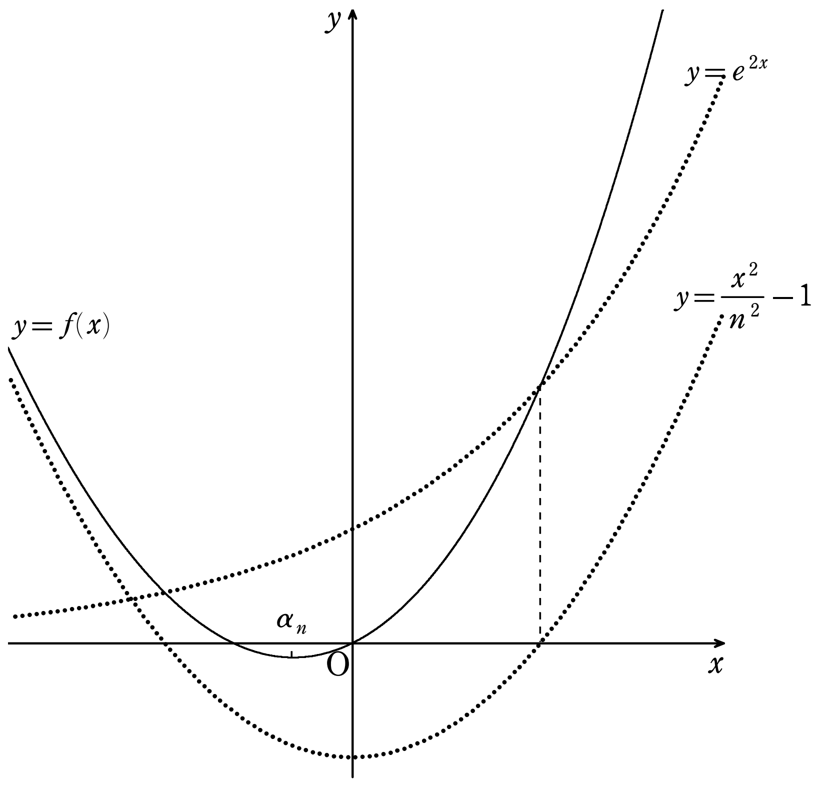
$x>\alpha_n$ においては $e^{2x}>-\dfrac{1}{n^2}x$ より $f'(x)>0$

$x<\alpha_n$ においては $e^{2x}<-\dfrac{1}{n^2}x$ より $f'(x)<0$

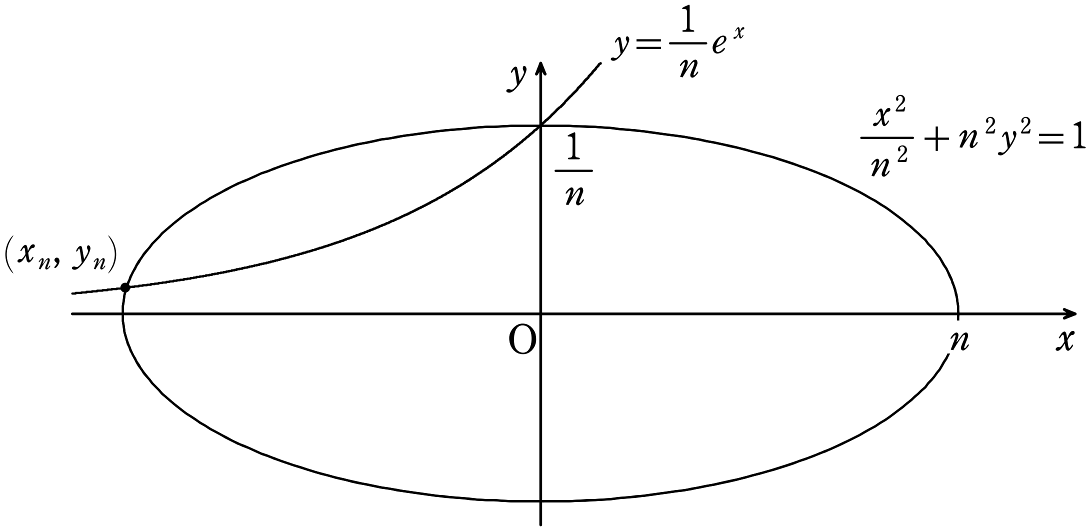
また，任意の x に対して $f''(x)>0$ であるから

$y=f(x)$ のグラフは下に凸。

よって，グラフの概形は次の通り。



(2)



2 つの式を連立して $\begin{cases}\dfrac{x^2}{n^2}+n^2y^2=1\\ y=\dfrac{1}{n}e^x\end{cases}$ より

$$\frac{x^2}{n^2}+n^2\left(\frac{1}{n}e^x\right)^2=1 \iff \frac{x^2}{n^2}+e^{2x}=1 \iff \frac{x^2}{n^2}+e^{2x}-1=0$$

この式を満たす x のうち $x\neq 0$ のものが，$x=x_n$（<0）である。

このとき，$\dfrac{{x_n}^2}{n^2}+e^{2x_n}-1=0 \iff \dfrac{{x_n}^2}{n^2}=1-e^{2x_n}$ であり $\dfrac{x_n}{n}<0$ より $\dfrac{x_n}{n}=-\sqrt{1-e^{2x_n}}$

ここで，$n\to\infty$ とすると，(1)より $y=-\dfrac{1}{n^2}x \to y=0$ となり，

(1)で描いた $y=e^{2x}$ と $y=-\dfrac{1}{n^2}x$ の 2 つのグラフから交点の x 座標 α_n について

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n=-\infty$ であることがわかる。

さらに，$x_n<\alpha_n<0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty$ となる。

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\sqrt{1-e^{2x_n}}\right)=-1$

（証明終）

[東京工業大学 1995 年前期 $\boxed{4}$]

1 から n までの数字を書いたカードが 1 枚ずつある。ただし $n \geqq 3$ とする。

(1) この n 枚のカードから無作為に同時に 2 枚のカードを取り出すとき，書かれた数の積の期待値 E を n で表せ。

(2) この n 枚のカードから無作為に同時に 3 枚のカードを取り出すとき，書かれた数の積の期待値を $E(n)$ で表す。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^3}$ を求めよ。

(1) $k,\ \ell$ を無作為に取り出した 2 枚のカードに書かれた数とする。

異なる n 枚の中から 2 枚取り出す場合の数は，${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通りあり，これらの取り出し方は同様に確からしい。

この $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通りの 2 数の積の合計は

$$\left(\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}k\ell-\sum_{p=1}^{n}p^2\right)\times\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\ell\cdot\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{p=1}^{n}p^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$ であるから

求める期待値（平均値）E は

$$E=\frac{\dfrac{1}{2}\left[\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]}{\dfrac{n(n-1)}{2}}$$

$$=\frac{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n(n-1)}$$

$$=\frac{3n(n+1)^2-2(n+1)(2n+1)}{12(n-1)}$$

$$=\frac{(n+1)(3n^2+3n-4n-2)}{12(n-1)}$$

$$=\frac{(n+1)(n-1)(3n+2)}{12(n-1)}$$

$$=\frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

(2) k, ℓ, m を無作為に取り出した3枚のカードに書かれた数とする。

異なる n 枚の中から3枚取り出す場合の数は，${}_n\mathrm{C}_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 通りあり，

これらの取り出し方は同様に確からしい。

この $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 通りの3数の積の合計は

$$\left(\sum_{m=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}k\ell m-\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}p^2q\right)\times\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{n}m\cdot\sum_{\ell=1}^{n}\ell\cdot\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{q=1}^{n}q\cdot\sum_{p=1}^{n}p^2\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left[\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^3-\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$ であるから

求める期待値（平均値）$E(n)$ は

$$E(n)=\frac{\dfrac{1}{6}\left[\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^3-\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$$

$$=\frac{\left[\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^3-\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]}{n(n-1)(n-2)}\quad\cdots（＊）$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^3}$ を求めるので，（＊）の分子の項の n についての次数を考えると

$\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^3$ は6次，$\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ は5次となっている。

（＊）の分母は3次であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^3}$ を計算した際，$\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ の部分は0

に収束することになる。

したがって，$\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^3$ の部分に注目して極限を考えれば十分であり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^3}{n(n-1)(n-2)}}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{8}n^3(n+1)^3}{n^3\cdot n(n-1)(n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{8}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}=\frac{1}{8}$$

となる。