[東京工業大学 1995 年前期 $\boxed{4}$]

☆────────────────────────☆

1 から n までの数字を書いたカードが 1 枚ずつある。ただし $n \geqq 3$ とする。

(1) この n 枚のカードから無作為に同時に 2 枚のカードを取り出すとき，書かれた数の積の期待値 E を n で表せ。

(2) この n 枚のカードから無作為に同時に 3 枚のカードを取り出すとき，書かれた数の積の期待値を $E(n)$ で表す。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^3}$ を求めよ。

☆────────────────────────☆

(1) $k,\ \ell$ を無作為に取り出した 2 枚のカードに書かれた数とする。

異なる n 枚の中から 2 枚取り出す場合の数は，${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通りあり，これらの取り出し方は同様に確からしい。

この $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通りの 2 数の積の合計は

$$\left(\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}k\ell-\sum_{p=1}^{n}p^2\right)\times\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\ell\cdot\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{p=1}^{n}p^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$ であるから

求める期待値（平均値）E は

$$E=\frac{\dfrac{1}{2}\left[\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]}{\dfrac{n(n-1)}{2}}$$

$$=\frac{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n(n-1)}$$

$$=\frac{3n(n+1)^2-2(n+1)(2n+1)}{12(n-1)}$$

$$=\frac{(n+1)(3n^2+3n-4n-2)}{12(n-1)}$$

$$=\frac{(n+1)(n-1)(3n+2)}{12(n-1)}$$

$$=\frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

(2) $k,\ \ell,\ m$ を無作為に取り出した3枚のカードに書かれた数とする。

異なる n 枚の中から3枚取り出す場合の数は，${}_n\mathrm{C}_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 通りあり，

これらの取り出し方は同様に確からしい。

この $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 通りの3数の積の合計は

$$\left(\sum_{m=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}k\ell m-\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}p^2q\right)\times\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{n}m\cdot\sum_{\ell=1}^{n}\ell\cdot\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{q=1}^{n}q\cdot\sum_{p=1}^{n}p^2\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left[\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^3-\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$ であるから

求める期待値（平均値）$E(n)$ は

$$E(n)=\frac{\dfrac{1}{6}\left[\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^3-\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$$

$$=\frac{\left[\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^3-\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]}{n(n-1)(n-2)}\quad\cdots（＊）$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^3}$ を求めるので，（＊）の分子の項の n についての次数を考えると

$\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^3$ は6次，$\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ は5次となっている。

（＊）の分母は3次であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^3}$ を計算した際，$\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ の部分は0

に収束することになる。

したがって，$\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^3$ の部分に注目して極限を考えれば十分であり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^3}{n(n-1)(n-2)}}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{8}n^3(n+1)^3}{n^3\cdot n(n-1)(n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{8}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}=\frac{1}{8}$$

となる。