[東京工業大学 1995 年前期 $\boxed{3}$]

n を自然数とする。

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{n^2}+e^{2x}-1$ の増減を調べ，グラフの概形をえがけ。

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{n^2}+n^2y^2=1$ と曲線 $y=\dfrac{1}{n}e^x$ の交点のうち $\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right)$ でない方の座標を $(x_n,\ y_n)$ とおく。

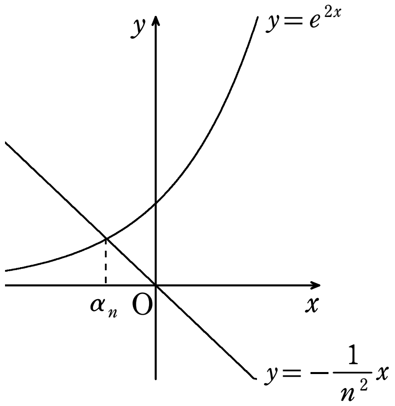
このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=-1$ であることを示せ。

---

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{n^2}+e^{2x}-1$ より $f'(x)=\dfrac{2x}{n^2}+2e^{2x}$， $f''(x)=\dfrac{2}{n^2}+4e^{2x}$ である。

$f'(x)=0$ となるのは $\dfrac{2x}{n^2}+2e^{2x}=0$ より $e^{2x}=-\dfrac{1}{n^2}x$

単調増加な $y=e^{2x}$ と単調減少な $y=-\dfrac{1}{n^2}x$ の 2 つのグラフは，図のように $x=\alpha_n<0$ で交わる。



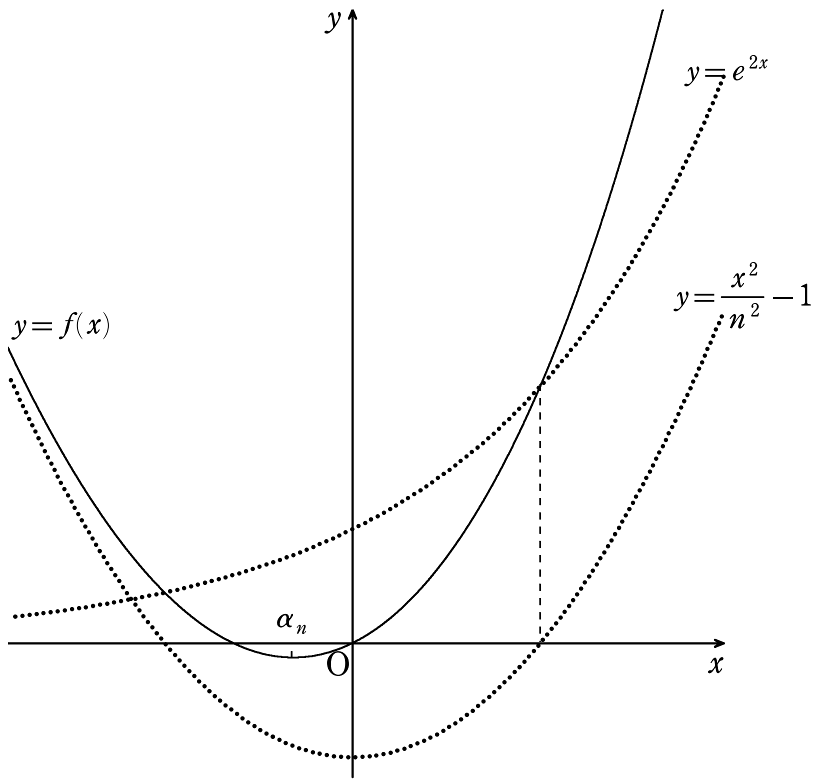
$x>\alpha_n$ においては $e^{2x}>-\dfrac{1}{n^2}x$ より $f'(x)>0$

$x<\alpha_n$ においては $e^{2x}<-\dfrac{1}{n^2}x$ より $f'(x)<0$

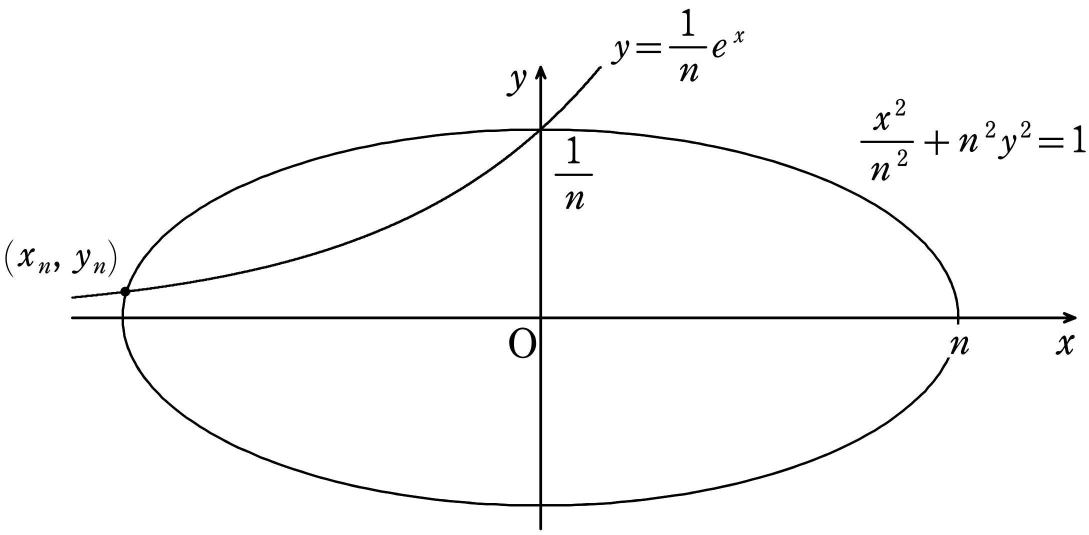
また，任意の x に対して $f''(x)>0$ であるから

$y=f(x)$ のグラフは下に凸。

よって，グラフの概形は次の通り。



(2)



2 つの式を連立して $\begin{cases} \dfrac{x^2}{n^2}+n^2y^2=1 \\ y=\dfrac{1}{n}e^x \end{cases}$ より

$$\frac{x^2}{n^2}+n^2\left(\frac{1}{n}e^x\right)^2=1 \iff \frac{x^2}{n^2}+e^{2x}=1 \iff \frac{x^2}{n^2}+e^{2x}-1=0$$

この式を満たす x のうち $x\neq 0$ のものが，$x=x_n$ （<0）である。

このとき，$\dfrac{{x_n}^2}{n^2}+e^{2x_n}-1=0 \iff \dfrac{{x_n}^2}{n^2}=1-e^{2x_n}$ であり $\dfrac{x_n}{n}<0$ より $\dfrac{x_n}{n}=-\sqrt{1-e^{2x_n}}$

ここで，$n\to\infty$ とすると，(1)より $y=-\dfrac{1}{n^2}x \to y=0$ となり，

(1)で描いた $y=e^{2x}$ と $y=-\dfrac{1}{n^2}x$ の 2 つのグラフから交点の x 座標 α_n について

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=-\infty$ であることがわかる。

さらに，$x_n<\alpha_n<0$ であるから $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$ となる。

したがって $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\sqrt{1-e^{2x_n}}\right)=-1$

（証明終）