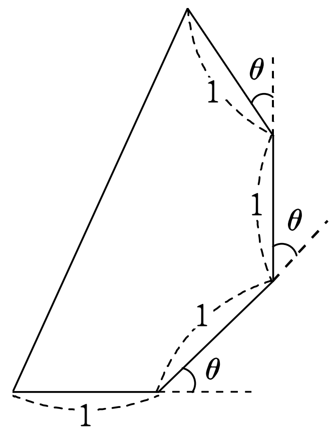
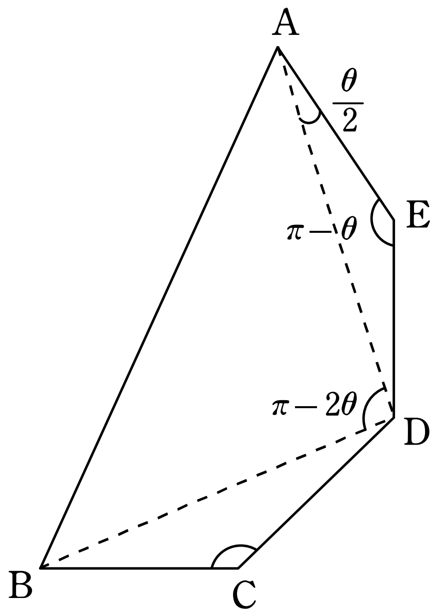
[ 東京工業大学 1995 年前期 $\boxed{2}$ ]

右図のような 4 辺の長さ 1 で，それらのなす角が $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるような五角形の面積の最大値を求めよ。




右図のように，五角形の頂点を A, B, C, D, E とおく。




このとき，△AED と△DCB は合同であり，

$\angle\mathrm{AED}=\angle\mathrm{DCB}=\pi-\theta$ である。

また，$\angle\mathrm{ADE}=\dfrac{\theta}{2}$ より $\angle ADB=\pi-\theta-\dfrac{\theta}{2}\times 2=\pi-2\theta$ であり，

$\mathrm{AD}=2\mathrm{AE}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$ である。

五角形を「頂角が $\pi-\theta$ で，等辺が 1」の 2 つの三角形と

「頂角が $\pi-2\theta$ で，等辺が $2\cos\dfrac{\theta}{2}$ 」の三角形に分けて

面積を求める。五角形の面積を $S$ とおくと

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\pi-\theta)\times 2+\frac{1}{2}\cdot\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\cdot\sin(\pi-2\theta)=\sin\theta+(1+\cos\theta)\sin 2\theta$$ となる。

$$\frac{dS}{d\theta}=\cos\theta-\sin\theta\cdot\sin 2\theta+(1+\cos\theta)\cdot 2\cos 2\theta$$

$$=\cos\theta-\sin\theta\cdot(2\sin\theta\cos\theta)+2(1+\cos\theta)\cdot(2\cos^2\theta-1)$$

$$=\cos\theta-2\sin^2\theta\cdot\cos\theta+2(1+\cos\theta)\cdot(2\cos^2\theta-1)$$

$$=\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cdot\cos\theta+2(1+\cos\theta)\cdot(2\cos^2\theta-1)$$

$$=6\cos^3\theta+4\cos^2\theta-3\cos\theta-2$$

$$=(3\cos\theta+2)\left(\sqrt{2}\cos\theta+1\right)\left(\sqrt{2}\cos\theta-1\right)$$ となり

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\dfrac{dS}{d\theta}=0$ となるのは $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のみ。

$S$ の増減は下表に従う。

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dS}{d\theta}$ | ／ | $+$ | $0$ | $-$ | ／ |
| $S$ | ／ | ↗ | | ↘ | ／ |

よって求める面積の最大値は $S\big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\sin\frac{\pi}{4}+\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=1+\sqrt{2}$$