[東京工業大学 1995 年前期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して数列 $a(n)=\dfrac{(n+2)(n+3)(n+4)}{n!}$ を考える。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a(n)$ を求めよ。

(2) $a(n)$ が整数となる n をすべて求めよ。

(3) 積 $a(1)\,a(2)\cdots a(n)$ が整数となる n をすべて求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1)　十分大きな自然数 n に対し，$n!=n(n-1)(n-2)\times(n-3)!$

よって $a(n)=\dfrac{(n+2)(n+3)(n+4)}{n(n-1)(n-2)}\times\dfrac{1}{(n-3)!}$ となる。

ここで，$\dfrac{(n+2)(n+3)(n+4)}{n(n-1)(n-2)}=\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)\left(1+\dfrac{4}{n}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}\to1\quad(n\to\infty)$

$\dfrac{1}{(n-3)!}\to0\quad(n\to\infty)$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a(n)=0$ である。

(2)　$a(1)=\dfrac{3\cdot4\cdot5}{1!}=60$，$a(2)=\dfrac{4\cdot5\cdot6}{2!}=60$，$a(3)=\dfrac{5\cdot6\cdot7}{3!}=35$，$a(4)=\dfrac{6\cdot7\cdot8}{4!}=14$，

$a(5)=\dfrac{7\cdot8\cdot9}{5!}=\dfrac{21}{5}$，$a(6)=\dfrac{8\cdot9\cdot10}{6!}=1$ であるから $n\leqq6$ の範囲では $a(n)$ が整数になるのは

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$ のときである。

また，$n\geqq7$ では $0<a(n)<1$ であるので $a(n)$ が整数になることはない。

このことを数学的帰納法により示す。

(i) $n=7$ のとき，$a(7)=\dfrac{9\cdot10\cdot11}{7!}=\dfrac{11}{56}$ より $0<a(7)<1$ である。

(ii) $n=k$ のとき，$0<a(k)=\dfrac{(k+2)(k+3)(k+4)}{k!}<1$ であるとする。

このとき，$a(k+1)=\dfrac{(k+3)(k+4)(k+5)}{(k+1)!}$

$$=\frac{k+2}{k+2}\cdot\frac{(k+3)(k+4)(k+5)}{(k+1)k!}$$

$$=\frac{k+5}{(k+2)(k+1)}\cdot\frac{(k+2)(k+3)(k+4)}{k!}$$

$$=\frac{k+5}{(k+2)(k+1)}\cdot a(k)$$ である。

ここで，$k \geqq 7$ のときは $(k+2)(k+1)-(k+5)=k^2+2k-3$

$$=(k+1)^2-4$$

$$\geqq (7+1)^2-4>0$$

であるから $0<\dfrac{k+5}{(k+2)(k+1)}<1$ なので，$0<a(k+1)<1$ が成り立つ。

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

(ｉ)(ⅱ)から数学的帰納法により $n \geqq 7$ では $0<a(n)<1$ である。

よって，求める n は $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$

(3) $p_n=a(1)\cdot a(2)\cdots\cdots\cdot a(n)\quad(n=1,2,3,\cdots)$ とおくと，$\{p_n\}$ は(2)より各項正で $n \geqq 7$ では減少する。

また，(2)の計算結果より $n \leqq 6$ では p_n は整数である。

$n \geqq 7$ での p_n を求めてみると

$$p_7=p_6\cdot a(7)=60\cdot 60\cdot 35\cdot 14\cdot\frac{21}{5}\cdot 1\cdot a(7)=2^5\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot\frac{9\cdot 10\cdot 11}{7!}=2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11$$

$$p_8=p_7\cdot a(8)=2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 12}{8!}=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11^2}{2^2}$$

$$p_9=p_8\cdot a(9)=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11^2}{2^2}\cdot\frac{11\cdot 12\cdot 13}{9!}=\frac{5\cdot 11^3\cdot 13}{2^7\cdot 3}$$

$$p_{10}=p_9\cdot a(10)=\frac{5\cdot 11^3\cdot 13}{2^7\cdot 3}\cdot\frac{12\cdot 13\cdot 14}{10!}=\frac{11^3\cdot 13^2}{2^{12}\cdot 3^4\cdot 5}<1$$

となることから，$n \geqq 7$ の範囲で p_n が整数になるのは $n=7$ のみである。

よって，求める n は $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,5,\ 6,\ 7$ である。