



関数 $f(x)$ に対し $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ とおく。

ある定数 a, b, c が存在して $F(x) = x^2 + ax|x-b| + cx$ が常に成立し、さらに 3 つの条件

(i) $f(x)$ は連続

(ii) $F(1) = 0$

(iii) $f(0) = 1$

が満たされているとする。このとき $f(x)$ を求めよ。



$f(x)$ は連続なので $F(x) = \int_0^x f(t) dt = x^2 + ax|x-b| + cx$ は微分可能である。

(A) $x \geq b$ のとき

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = x^2 + ax(x-b) + cx \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b+0} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} &= \lim_{x \rightarrow b+0} \frac{\{x^2 + ax(x-b) + cx\} - (b^2 + bc)}{x - b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b+0} \frac{(x+b)(x-b) + ax(x-b) + c(x-b)}{x - b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b+0} \{(x+b) + ax + c\} \\ &= ab + 2b + c \end{aligned}$$

(B) $x < b$ のとき

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = x^2 - ax(x-b) + cx$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} &= \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{\{x^2 - ax(x-b) + cx\} - (b^2 + bc)}{x - b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{(x+b)(x-b) - ax(x-b) + c(x-b)}{x - b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b-0} \{(x+b) - ax + c\} \\ &= -ab + 2b + c \end{aligned}$$

$F(x)$ は $x = b$ で微分可能なので、 $ab + 2b + c = -ab + 2b + c$ より

$ab = 0$ なので $a = 0 \cdots \textcircled{1}$ または $b = 0 \cdots \textcircled{2}$ である。

①のとき、 $a=0$ より $F(x)=x^2+cx$

$F(1)=0$ より $c=-1$ なので $F(x)=x^2-x$

このとき、 $F'(x)=f(x)=2x-1$ となつて $f(0)=1$ と矛盾する。

②のとき、 $b=0$ より $F(x)=x^2+ax|x|+cx$

$x \geq 0$ において $F(x)=x^2+ax^2+cx$ であり、

このとき、 $F'(x)=f(x)=2(1+a)x+c$

$F(1)=0$ より $1+a+c=0$, $f(0)=1$ より $c=1$ となつて $a=-2$ となる。

したがつて、求める $f(x)$ は $f(x)=2x-4|x|+1$

[東京工業大学 1994 年後期 2]



自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $(2 - \sqrt{3})^n$ という形の数を考える。これらの数はいずれも, それぞれ適当な自然数 m が存在して $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ という表示をもつことを示せ。



二項定理より $(a+b) = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^{n-k} b^k$ が成り立つから

自然数 M, N が存在して $(2 + \sqrt{3})^n = M + N\sqrt{3}$

$$(2 - \sqrt{3})^n = M - N\sqrt{3} \quad \text{と表せる。}$$

これらを辺々かけると

$$(2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n = (M + N\sqrt{3})(M - N\sqrt{3})$$

$$\{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\}^n = M^2 - 3N^2$$

$$1 = M^2 - 3N^2 \quad \text{を得る。}$$

ここで, $M^2 = m, 3N^2 = k$ とおけば, m, k はともに自然数であり

$1 = m - k$ から $k = m - 1$ となっている。

よって $M = \sqrt{m}, N\sqrt{3} = \sqrt{m-1}$ となるので, 題意の表示が可能である。