[東京工業大学 1994 年後期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

自然数 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して，$(2-\sqrt{3})^n$ という形の数を考える。これらの数はいずれも，それぞれ適当な自然数 m が存在して $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ という表示をもつことを示せ。

☆ ☆

二項定理より $(a+b)=\sum_{K=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$ が成り立つから

自然数 M, N が存在して $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = M+N\sqrt{3}$

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n = M-N\sqrt{3}$$ と表せる。

これらを辺々かけると

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n = \left(M+N\sqrt{3}\right)\left(M-N\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right\}^n = M^2-3N^2$$

$\Leftrightarrow \quad 1=M^2-3N^2$ を得る。

ここで，$M^2=m,\ 3N^2=k$ とおけば，m, k はともに自然数であり

$1=m-k$ から $k=m-1$ となっている。

よって $M=\sqrt{m},\ N\sqrt{3}=\sqrt{m-1}$ となるので，題意の表示が可能である。