[東京工業大学 1994 年後期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

関数 $f(x)$ に対し $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とおく。

ある定数 $a,\ b,\ c$ が存在して $F(x)=x^2+ax|x-b|+cx$ が常に成立し，さらに 3 つの条件

（ⅰ） $f(x)$ は連続

（ⅱ） $F(1)=0$

（ⅲ） $f(0)=1$

が満たされているとする。このとき $f(x)$ を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)$ は連続なので $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=x^2+ax|x-b|+cx$ は微分可能である。

(A) $x \geqq b$ のとき

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=x^2+ax(x-b)+cx$ より

$$\lim_{x\to b+0}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=\lim_{x\to b+0}\frac{\{x^2+ax(x-b)+cx\}-(b^2+bc)}{x-b}$$

$$=\lim_{x\to b+0}\frac{(x+b)(x-b)+ax(x-b)+c(x-b)}{x-b}$$

$$=\lim_{x\to b+0}\{(x+b)+ax+c\}$$

$$=ab+2b+c$$

(B) $x<b$ のとき

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=x^2-ax(x-b)+cx$

$$\lim_{x\to b-0}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=\lim_{x\to b-0}\frac{\{x^2-ax(x-b)+cx\}-(b^2+bc)}{x-b}$$

$$=\lim_{x\to b-0}\frac{(x+b)(x-b)-ax(x-b)+c(x-b)}{x-b}$$

$$=\lim_{x\to b-0}\{(x+b)-ax+c\}$$

$$=-ab+2b+c$$

$F(x)$ は $x=b$ で微分可能なので， $ab+2b+c=-ab+2b+c$ より

$ab=0$ なので $a=0\cdots$① または $b=0\cdots$② である。

①のとき，$a=0$ より $F(x)=x^2+cx$

$F(1)=0$ より $c=-1$ なので $F(x)=x^2-x$

このとき，$F'(x)=f(x)=2x-1$ となって $f(0)=1$ と矛盾する。

②のとき，$b=0$ より $F(x)=x^2+ax|x|+cx$

$x \geqq 0$ において $F(x)=x^2+ax^2+cx$ であり，

このとき，$F'(x)=f(x)=2(1+a)x+c$

$F(1)=0$ より $1+a+c=0$，$f(0)=1$ より $c=1$ となって $a=-2$ となる。

したがって，求める $f(x)$ は $f(x)=2x-4|x|+1$