[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

放物線 $y=x^2$ を C とし，2 つの異なる点 P, Q は C 上を動くものとする。直線 PQ と C とで囲まれる図形の面積が, 一定の値 $\dfrac{1}{6}$ をとるとき, 曲線 C の P における接線と Q における接線との交点 R は, どのような曲線上を動くか。その方程式を求めよ。

☆ ☆

$\mathrm{P}(\alpha,\alpha^2),\ \mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)\ (\alpha<\beta)$ とおく。

$y=x^2$ より $y'=2x$ であり，P における接線 ℓ_1 は $y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)\ \Leftrightarrow\ y=2\alpha x-\alpha^2$ …①

同様にして Q における接線 ℓ_2 は $y=2\beta x-\beta^2$ …①

①，②を連立して $2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2\ \Leftrightarrow\ 2(\beta-\alpha)x=(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)$

$\beta-\alpha\neq 0$ より $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ このとき $y=2\alpha\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha^2=\alpha\beta$ となる。

よって $\mathrm{R}(X,Y)$ とすると $X=\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ Y=\alpha\beta$ …③ である。

直線 PQ は $y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$ なので,

直線 PQ と C とで囲まれる図形の面積が，一定の値 $\dfrac{1}{6}$ をとることから

$$\int_\alpha^\beta\left\{\left((\alpha+\beta)x-\alpha\beta\right)-x^2\right\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\left(\beta-\alpha\right)^3=\frac{1}{6}\qquad\text{より}\quad \beta-\alpha=1\ \cdots④$$

したがって $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ に③，④を代入して $1=(2X)^2-4Y$ より $Y=X^2-\dfrac{1}{4}$

ここで，α,β は実数であり t の 2 次方程式 $t^2-2Xt+Y=0$ の 2 解である。

判別式を D として $\dfrac{D}{4}=X^2-Y>0$ より $Y<X^2$ を得る。

$Y=X^2-\dfrac{1}{4}$ 上の点はこの条件をすべて満たしている。

以上より R は曲線 $y=x^2-\dfrac{1}{4}$ 上を動く。

［ 東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{2}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

双曲線 $xy=-2$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ -\dfrac{2}{t}\right)\ (t\neq 0)$ を，原点を中心とし反時計回りに角度 θ だけ回転した点を Q とする。

(1) Q の座標を θ と t で表せ。

(2) θ を固定し P が C 上を動くとき，Q はどのような曲線をえがくか。その方程式を求めよ。

(3) Q のえがく曲線が，点 $(\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}-1)$ を通るような θ の値を $0<\theta<2\pi$ の範囲ですべて求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ -\dfrac{2}{t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\cos\theta+\dfrac{2}{t}\sin\theta\\ t\sin\theta-\dfrac{2}{t}\cos\theta\end{pmatrix}$ より $\mathrm{Q}\left(t\cos\theta+\dfrac{2}{t}\sin\theta,\ t\sin\theta-\dfrac{2}{t}\cos\theta\right)$

(2) $\mathrm{Q}(X,Y)$ とおく。

$\begin{cases}X=t\cos\theta+\dfrac{2}{t}\sin\theta & \cdots①\\ Y=t\sin\theta-\dfrac{2}{t}\cos\theta & \cdots②\end{cases}$ であり，

①$\times\sin\theta$ －②$\times\cos\theta$ ： $X\sin\theta-Y\cos\theta=\dfrac{2}{t}$ $\cdots$③

①$\times\cos\theta$ ＋②$\times\sin\theta$ ： $X\cos\theta+Y\sin\theta=t$ $\cdots$④

③，④より t を消去して，Q のえがく曲線は $(X\sin\theta-Y\cos\theta)(X\cos\theta+Y\sin\theta)=2$

(3) Q のえがく曲線が点 $(\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}-1)$ を通るので

$$\left\{\left(\sqrt{3}+1\right)\sin\theta-\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\theta\right\}\left\{\left(\sqrt{3}+1\right)\cos\theta+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin\theta\right\}=2$$

$$-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)\cos^2\theta+\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2\theta+\left\{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2\right\}\cos\theta\sin\theta=2$$

$$-2\cos^2\theta+2\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=2$$

$$-\cos^2\theta+1-\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=1$$

$$\cos\theta\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)=0$$

よって　$\cos\theta=0$　または　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0<\theta<2\pi$　より　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7\pi}{6},\ \dfrac{3\pi}{2}$

[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{3}$]

(1) 定積分 $\int_0^{\pi} e^{-\pi}\sin x\,dx$ を求めよ。

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-\pi}|\sin x|dx$ を求めよ。

---

(1) $I=\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$, $J=\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$ とおくと

$$I=\Big[(-e^{-x})\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x})\cos x\,dx=J \quad \cdots ①$$

$$J=\Big[(-e^{-x})\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x})(-\sin x)\,dx=e^{-\pi}+1-I \quad \cdots ②$$

①, ②より $I=\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$

(2) k が偶数のとき

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|dx &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx \\
&= \Big[e^{-x}(-\cos x)\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-e^{-x})(-\cos x)\,dx \\
&= e^{-(k+1)\pi}-e^{-k\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\cos x\,dx \\
&= e^{-(k+1)\pi}-e^{-k\pi}-\left\{\Big[e^{-x}\sin x\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-e^{-x})\sin x\,dx\right\} \\
&= e^{-(k+1)\pi}-e^{-k\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx
\end{aligned}$$

よって $2\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx=e^{-(k+1)\pi}-e^{-k\pi}$ から $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx=\dfrac{e^{-k\pi}}{2}(1+e^{-\pi})$

k が奇数のとき

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|dx &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}(-\sin x)\,dx \\
&= -\left\{\Big[e^{-x}(-\cos x)\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-e^{-x})(-\cos x)\,dx\right\} \\
&= -\left\{-e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\cos x\,dx\right\} \\
&= e^{-(k+1)\pi}-e^{-k\pi}+\left\{\Big[e^{-x}\sin x\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-e^{-x})\sin x\,dx\right\}
\end{aligned}$$

$$= e^{-(k+1)\pi} - e^{-k\pi} - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx$$

よって $2\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx = e^{-(k+1)\pi} - e^{-k\pi}$ から $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \dfrac{e^{-k\pi}}{2}(1+e^{-\pi})$

したがって $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-\pi}|\sin x|dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|dx$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{-k\pi}}{2}(1+e^{-\pi})$$

$$= \frac{1+e^{-\pi}}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k\pi}$$

$$= \frac{1+e^{-\pi}}{2}\left(1+e^{-\pi}+e^{-2\pi}+\cdots\right)$$

$0 < e^{-\pi} < 1$ なので $\displaystyle = \frac{1+e^{-\pi}}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}}$

$$= \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}$$

$$= \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$$

[注] (1)は部分積分を 2 回行って求めてもよい。

[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{4}$]

2 つの負でない整数 $m,\ n$ に対して，和

$$\left(\sum_{k=1}^{m+n} k\right)+n$$

を考え，これを $f(m,\ n)$ と書くことにする。ただし，$f(0,\ 0)=0$ とする。

(1) $f(m,\ n)\leqq 5$ を満たす点 $(m,\ n)$ の位置を，座標平面上に図示せよ。

(2) $f(m,\ n)=f(m',\ n')$ ならば $(m,\ n)=(m',\ n')$ であることを示せ。

---

(1) $m+n\geqq 1$ とすると，

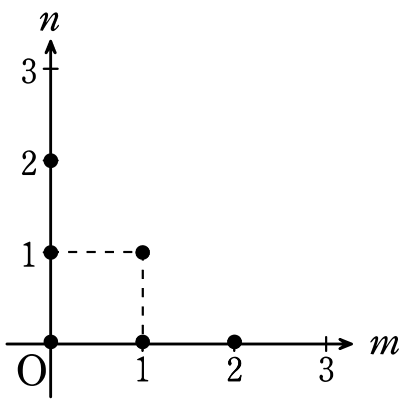
$$f(m,\ n)=\left(\sum_{k=1}^{m+n} k\right)+n$$

$$=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n \quad \cdots①$$

$f(0,\ 0)=0$ であるから

$\dfrac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n\leqq 5$ を満たす点 $(m,\ n)$ は

$(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2)$



(2) 対偶「$(m,\ n)\neq(m',\ n')$ ならば $f(m,\ n)\neq f(m',\ n')$」…（＊）が成り立つことを示す。

$f(m,\ n)=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m+n} k\right)+n$ であるから，$m+n=$(一定) のとき，$f(m,\ n)$ は n の増加関数である。

(ｉ) $m'+n'>m+n$ のとき

$f(\ell+1,\ 0)-f(0,\ \ell)=\dfrac{1}{2}(\ell+1)(\ell+2)-\left\{\dfrac{1}{2}\ell(\ell+1)+\ell\right\}=1$ であり，

$m'+n'>m+n$ から $(m'+n')-(m+n)\geqq 1$ なので $f(m',\ n')>f(m,\ n)$ が成り立つ。

よって $f(m',\ n')\neq f(m,\ n)$

(ii) $m'+n'<m+n$ のとき

(ｉ)と同様に $f(m',\ n')<f(m,\ n)$ が成り立つから $f(m',\ n')\neq f(m,\ n)$

(iii) $m'+n'=m+n$ のとき

$(m,\ n)\neq(m',\ n')$ であるから $n\neq n'$ なので

$$f(m,\, n)-f(m',\, n')=\left\{\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n\right\}-\left\{\frac{1}{2}(m'+n')(m'+n'+1)+n'\right\}$$

$$=n-n' \quad \neq 0$$

よって　$f(m,\, n)\neq f(m',\, n')$

(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)より，いずれの場合も（＊）は成り立つ。

したがって，題意は示された。

[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{5}$]

☆ ☆

放物線 $y=x^2$ 上の点 P と，放物線 $y=-x^2-16x-65$ 上の点 Q に対して，線分 PQ を考える。このとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

☆ ☆

$\mathrm{P}(t,\ t^2),\ \mathrm{Q}(s,\ -s^2-16s-65)$ とおく。

線分 PQ の長さが最小となるのは P における法線と Q における法線が一致する場合である。

P での法線は $y-t^2=-\dfrac{1}{2t}(x-t)\ \ (t\neq 0)$ …①

Q での法線は $y-(-s^2-16s-65)=\dfrac{1}{2s+16}(x-s)\ \ (s\neq -8)$ …②

であり，①，②が一致するとき，傾きと切片が等しいから

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2t}=\dfrac{1}{2s+16} & \cdots③ \\ t^2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{s}{2s+16}-s^2-16s-65 & \cdots④ \end{cases}$$

③より $t=-(s+8)$ となるので，④に代入して

$$(s+8)^2+\frac{1}{2}=-\frac{s}{2s+16}-s^2-16s-65$$

$$(s^2+16s+64)(2s+16)+s+8=-s-(s^2+16s+65)(2s+16)$$

$$2s^3+48s^2+384s+1024+s+8=-s-2s^3-48s^2-386s-1040$$

$$4s^3+96s^2+772s+2072=0$$

$$s^3+24s^2+193s+518=0$$

$$(s+7)(s^2+17s+74)=0$$

$s^2+17s+74>0$ より $s=-7$ このとき $t=-1$

よって $\mathrm{P}(-1,\ 1),\ \mathrm{Q}(-7,\ -2)$ となる。

したがって PQ の長さの最小値は $\sqrt{\{-7-(-1)\}^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{5}$

[注] ①と②が一致するとき， P での法線①が $\mathrm{Q}(s,\ -s^2-16s-65)$ を通るから

$s^2-16s-65-t^2=-\dfrac{1}{2t}(s-t)$ …⑤ を立式し，③と連立してもよい。

結果的には，t の値の方が求めやすい値なので s を消去した方が楽かもしれない。