[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{1}$]

放物線 $y=x^2$ を C とし, 2 つの異なる点 P, Q は C 上を動くものとする。直線 PQ と C とで囲まれる図形の面積が, 一定の値 $\dfrac{1}{6}$ をとるとき, 曲線 C の P における接線と Q における接線との交点 R は, どのような曲線上を動くか。その方程式を求めよ。

[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{2}$]

☆―☆

双曲線 $xy=-2$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ -\dfrac{2}{t}\right)\ (t\neq 0)$ を，原点を中心とし反時計回りに角度 θ だけ回転した点を Q とする。

(1) Q の座標を θ と t で表せ。

(2) θ を固定し P が C 上を動くとき，Q はどのような曲線をえがくか。その方程式を求めよ。

(3) Q のえがく曲線が，点 $(\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}-1)$ を通るような θ の値を $0<\theta<2\pi$ の範囲ですべて求めよ。

☆―☆

[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{3}$]

(1) 定積分 $\int_0^{\pi} e^{-\pi} \sin x\, dx$ を求めよ。

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-\pi} |\sin x| dx$ を求めよ。

[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{4}$]

☆ ☆

2 つの負でない整数 $m,\ n$ に対して，和

$$\left(\sum_{k=1}^{m+n} k\right) + n$$

を考え，これを $f(m,\ n)$ と書くことにする。ただし，$f(0,\ 0) = 0$ とする。

(1) $f(m,\ n) \leqq 5$ を満たす点 $(m,\ n)$ の位置を，座標平面上に図示せよ。

(2) $f(m,\ n) = f(m',\ n')$ ならば $(m,\ n) = (m',\ n')$ であることを示せ。

☆ ☆

[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{5}$]

放物線 $y=x^2$ 上の点 P と，放物線 $y=-x^2-16x-65$ 上の点 Q に対して，線分 PQ を考える。このとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。