[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{5}$]

放物線 $y=x^2$ 上の点Pと，放物線 $y=-x^2-16x-65$ 上の点Qに対して，線分PQを考える。このとき，線分PQの長さの最小値を求めよ。

$P(t,\ t^2),\ Q(s,\ -s^2-16s-65)$ とおく。

線分PQの長さが最小となるのはPにおける法線とQにおける法線が一致する場合である。

Pでの法線は $y-t^2=-\dfrac{1}{2t}(x-t)\ \ (t\neq 0)$ …①

Qでの法線は $y-(-s^2-16s-65)=\dfrac{1}{2s+16}(x-s)\ \ (s\neq -8)$ …②

であり，①，②が一致するとき，傾きと切片が等しいから

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2t}=\dfrac{1}{2s+16} & \cdots ③ \\ t^2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{s}{2s+16}-s^2-16s-65 & \cdots ④ \end{cases}$$

③より $t=-(s+8)$ となるので，④に代入して

$$(s+8)^2+\frac{1}{2}=-\frac{s}{2s+16}-s^2-16s-65$$

$$(s^2+16s+64)(2s+16)+s+8=-s-(s^2+16s+65)(2s+16)$$

$$2s^3+48s^2+384s+1024+s+8=-s-2s^3-48s^2-386s-1040$$

$$4s^3+96s^2+772s+2072=0$$

$$s^3+24s^2+193s+518=0$$

$$(s+7)(s^2+17s+74)=0$$

$s^2+17s+74>0$ より $s=-7$ このとき $t=-1$

よって $P(-1,1),\ Q(-7,-2)$ となる。

したがって PQ の長さの最小値は $\sqrt{\{-7-(-1)\}^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{5}$

[注] ①と②が一致するとき，Pでの法線①が $Q(s,\ -s^2-16s-65)$ を通るから

$s^2-16s-65-t^2=-\dfrac{1}{2t}(s-t)$ …⑤ を立式し，③と連立してもよい。

結果的には，t の値の方が求めやすい値なので s を消去した方が楽かもしれない。