[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{4}$]

2 つの負でない整数 $m,\ n$ に対して，和

$$\left(\sum_{k=1}^{m+n} k\right)+n$$

を考え，これを $f(m,\ n)$ と書くことにする。ただし，$f(0,\ 0)=0$ とする。

(1) $f(m,\ n) \leqq 5$ を満たす点 $(m,\ n)$ の位置を，座標平面上に図示せよ。

(2) $f(m,\ n)=f(m',\ n')$ ならば $(m,\ n)=(m',\ n')$ であることを示せ。

---

(1) $m+n \geqq 1$ とすると，

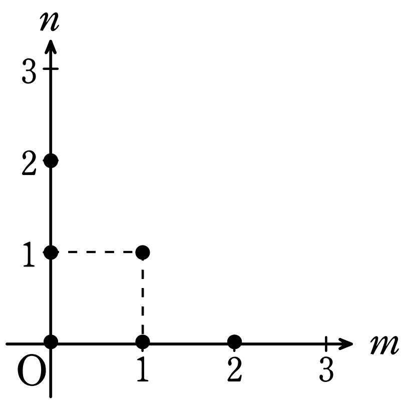
$$f(m,\ n)=\left(\sum_{k=1}^{m+n} k\right)+n$$

$$=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n \quad \cdots①$$

$f(0,\ 0)=0$ であるから

$\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n \leqq 5$ を満たす点 $(m,\ n)$ は

$(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2)$



(2) 対偶「$(m,\ n) \neq (m',\ n')$ ならば $f(m,\ n) \neq f(m',\ n')$」…（＊）が成り立つことを示す。

$f(m,\ n)=\left(\sum_{k=1}^{m+n} k\right)+n$ であるから，$m+n=$(一定) のとき，$f(m,\ n)$ は n の増加関数である。

(ｉ) $m'+n' > m+n$ のとき

$f(\ell+1,\ 0)-f(0,\ \ell)=\frac{1}{2}(\ell+1)(\ell+2)-\left\{\frac{1}{2}\ell(\ell+1)+\ell\right\}=1$ であり，

$m'+n' > m+n$ から $(m'+n')-(m+n) \geqq 1$ なので $f(m',\ n') > f(m,\ n)$ が成り立つ。

よって $f(m',\ n') \neq f(m,\ n)$

(ii) $m'+n' < m+n$ のとき

(ｉ)と同様に $f(m',\ n') < f(m,\ n)$ が成り立つから $f(m',\ n') \neq f(m,\ n)$

(iii) $m'+n' = m+n$ のとき

$(m,\ n) \neq (m',\ n')$ であるから $n \neq n'$ なので

$$f(m,\ n)-f(m',\ n')=\left\{\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n\right\}-\left\{\frac{1}{2}(m'+n')(m'+n'+1)+n'\right\}$$

$$=n-n' \quad \neq 0$$

よって　$f(m,\ n)\neq f(m',\ n')$

(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)より，いずれの場合も（＊）は成り立つ。

したがって，題意は示された。