[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{3}$]

---

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-\pi}\sin x\,dx$ を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-\pi}|\sin x|\,dx$ を求めよ。

---

(1) $I=\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$， $J=\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$ とおくと

$$I=\Big[(-e^{-x})\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x})\cos x\,dx=J\quad\cdots①$$

$$J=\Big[(-e^{-x})\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x})(-\sin x)\,dx=e^{-\pi}+1-I\quad\cdots②$$

①，②より $I=\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$

(2) k が偶数のとき

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx&=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx\\&=\Big[e^{-x}(-\cos x)\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-e^{-x})(-\cos x)\,dx\\&=e^{-(k+1)\pi}-e^{-k\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\cos x\,dx\\&=e^{-(k+1)\pi}-e^{-k\pi}-\left\{\Big[e^{-x}\sin x\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-e^{-x})\sin x\,dx\right\}\\&=e^{-(k+1)\pi}-e^{-k\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx\end{aligned}$$

よって $2\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx=e^{-(k+1)\pi}-e^{-k\pi}$ から $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx=\frac{e^{-k\pi}}{2}(1+e^{-\pi})$

k が奇数のとき

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx&=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}(-\sin x)\,dx\\&=-\left\{\Big[e^{-x}(-\cos x)\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-e^{-x})(-\cos x)\,dx\right\}\\&=-\left\{-e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\cos x\,dx\right\}\\&=e^{-(k+1)\pi}-e^{-k\pi}+\left\{\Big[e^{-x}\sin x\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-e^{-x})\sin x\,dx\right\}\end{aligned}$$

$$= e^{-(k+1)\pi} - e^{-k\pi} - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

よって $2\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx = e^{-(k+1)\pi} - e^{-k\pi}$ から $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx = \dfrac{e^{-k\pi}}{2}(1+e^{-\pi})$

したがって $\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-\pi} |\sin x| dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{-k\pi}}{2}(1+e^{-\pi})$$

$$= \frac{1+e^{-\pi}}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\pi}$$

$$= \frac{1+e^{-\pi}}{2}\left(1+e^{-\pi}+e^{-2\pi}+\cdots\right)$$

$0 < e^{-\pi} < 1$ なので $= \dfrac{1+e^{-\pi}}{2}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-\pi}}$

$$= \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}$$

$$= \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$$

[注] (1)は部分積分を 2 回行って求めてもよい。