[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

双曲線 $xy=-2$ をCとする。C上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ -\dfrac{2}{t}\right)$ $(t \neq 0)$ を，原点を中心とし反時計回りに角度θだけ回転した点をQとする。

(1) Qの座標をθとtで表せ。

(2) θを固定しPがC上を動くとき，Qはどのような曲線をえがくか。その方程式を求めよ。

(3) Qのえがく曲線が，点$(\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}-1)$を通るような$\theta$の値を$0<\theta<2\pi$の範囲ですべて求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -\dfrac{2}{t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t\cos\theta+\dfrac{2}{t}\sin\theta \\ t\sin\theta-\dfrac{2}{t}\cos\theta \end{pmatrix}$ より $\mathrm{Q}\left(t\cos\theta+\dfrac{2}{t}\sin\theta,\ t\sin\theta-\dfrac{2}{t}\cos\theta\right)$

(2) $\mathrm{Q}(X,Y)$ とおく。

$$\begin{cases} X=t\cos\theta+\dfrac{2}{t}\sin\theta & \cdots ① \\ Y=t\sin\theta-\dfrac{2}{t}\cos\theta & \cdots ② \end{cases}$$ であり，

①× $\sin\theta$ －②× $\cos\theta$ ： $X\sin\theta-Y\cos\theta=\dfrac{2}{t}$ $\cdots$③

①× $\cos\theta$ ＋②× $\sin\theta$ ： $X\cos\theta+Y\sin\theta=t$ $\cdots$④

③，④より t を消去して，Qのえがく曲線は $(X\sin\theta-Y\cos\theta)(X\cos\theta+Y\sin\theta)=2$

(3) Qのえがく曲線が点$(\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}-1)$を通るので

$$\left\{\left(\sqrt{3}+1\right)\sin\theta-\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\theta\right\}\left\{\left(\sqrt{3}+1\right)\cos\theta+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin\theta\right\}=2$$

$$-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)\cos^2\theta+\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2\theta+\left\{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2\right\}\cos\theta\sin\theta=2$$

$$-2\cos^2\theta+2\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=2$$

$$-\cos^2\theta+1-\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=1$$

$\cos\theta\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)=0$

よって　$\cos\theta=0$　または　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0<\theta<2\pi$　より　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7\pi}{6},\ \dfrac{3\pi}{2}$