[東京工業大学 1994 年前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

放物線 $y=x^2$ を C とし，2 つの異なる点 P, Q は C 上を動くものとする。直線 PQ と C とで囲まれる図形の面積が，一定の値 $\dfrac{1}{6}$ をとるとき，曲線 C の P における接線と Q における接線との交点 R は，どのような曲線上を動くか。その方程式を求めよ。

☆ ☆

$\mathrm{P}(\alpha, \alpha^2),\ \mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)\ (\alpha<\beta)$ とおく。

$y=x^2$ より $y'=2x$ であり，P における接線 ℓ_1 は $y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha) \Leftrightarrow y=2\alpha x-\alpha^2$ …①

同様にして Q における接線 ℓ_2 は $y=2\beta x-\beta^2$ …①

①，②を連立して $2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2 \Leftrightarrow 2(\beta-\alpha)x=(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)$

$\beta-\alpha\neq 0$ より $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ このとき $y=2\alpha\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha^2=\alpha\beta$ となる。

よって $\mathrm{R}(X, Y)$ とすると $X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}, Y=\alpha\beta$ …③ である。

直線 PQ は $y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$ なので，

直線 PQ と C とで囲まれる図形の面積が，一定の値 $\dfrac{1}{6}$ をとることから

$$\int_\alpha^\beta\left\{\left((\alpha+\beta)x-\alpha\beta\right)-x^2\right\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\left(\beta-\alpha\right)^3=\frac{1}{6} \qquad \text{より}\quad \beta-\alpha=1 \quad \cdots④$$

したがって $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ に③，④を代入して $1=(2X)^2-4Y$ より $Y=X^2-\dfrac{1}{4}$

ここで，α, β は実数であり t の 2 次方程式 $t^2-2Xt+Y=0$ の 2 解である。

判別式を D として $\dfrac{D}{4}=X^2-Y>0$ より $Y<X^2$ を得る。

$Y=X^2-\dfrac{1}{4}$ 上の点はこの条件をすべて満たしている。

以上より R は曲線 $y=x^2-\dfrac{1}{4}$ 上を動く。