



一辺の長さが 1 の立方体を，中心を通る対角線のうち一本を軸として回転させたとき，この立方体が通過する部分の体積を求めよ。



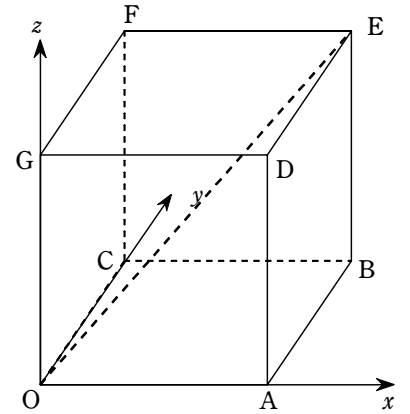
OA, OC, OG をそれぞれ  $x, y, z$  軸にとり，図のような立方体 OABC - DEFG を考える。

直線 OE 上の点  $P(x, y, z)$  は  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) と表せる。

P を通り OE に垂直な平面を  $\alpha_t$  の方程式は

$$1 \cdot (x-t) + 1 \cdot (y-t) + 1 \cdot (z-t) = u \quad x + y + z = 3t$$

となる。



P が O から E まで動くとき，立方体上かつ  $\alpha_t$  上の点で，P から最も遠い点は

- ( )  $0 \leq t < \frac{1}{3}$  のとき OA 上
- ( )  $\frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3}$  のとき AB 上
- ( )  $\frac{2}{3} \leq t < 1$  のとき BE 上

にある。

題意の回転体の平面  $\alpha_t$  による断面は円であり，対称性から  $0 \leq t < \frac{1}{2}$  における体積と  $\frac{1}{2} \leq t < 1$

は等しい。

ここで，( ) のときの  $\alpha_t$  と OA の交点を Q，( ) のときの  $\alpha_t$  と AB の交点を R とする。

$$\text{Q について } \begin{cases} x + y + z = 3t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{より } Q(3t, 0, 0)$$

$$\text{R について } \begin{cases} x + y + z = 3t \\ x = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{より } R(1, 3t - 1, 0)$$

である。

よって、 $0 < t < \frac{1}{3}$  のとき  $PQ^2 = 4t^2 + t^2 + t^2 = 6t^2$

$\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$  のとき  $PR^2 = (t-1)^2 + (-2t+1)^2 + t^2 = 6t^2 - 6t + 2$

である。

ここで、 $OP = u$  とおくと  $u = \sqrt{3}t$  であるから、求める体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \pi PQ^2 du + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi PR^2 du \\ &= \pi \left\{ \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} 4u^2 du + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (4u^2 + 2\sqrt{3}u + 2) du \right\} \\ &= \pi \left\{ \left[ \frac{4}{3} u^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} + \left[ \frac{4}{3} u^3 + \sqrt{3}u^2 + 2u \right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \end{aligned}$$



$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  とし、正の整数  $n$  に対し  $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$  とおく。

- (1)  $a_n, b_n, c_n, d_n$  を求めよ。  
 (2)  $a_n, b_n, c_n, d_n$  を 3 で割った余りを  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$  と書く。

$\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  となるための必要十分条件は  $n$  が 6 の倍数であることを示せ。



- (1)  $a_n = 2^n, b_n = n2^{n-1}, c_n = 0, d_n = 2^n$  となることを数学的帰納法で示す。

(i)  $n=1$  のとき

$a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = 0, d_1 = 2$  であり、 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  であるから成り立っている。

(ii)  $n=k$  のとき

$a_k = 2^k, b_k = k2^{k-1}, c_k = 0, d_k = 2^k$  と仮定する。

このとき、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{pmatrix} &= A^{k+1} = AA^k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & k2^k + 2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k+1} & (k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって  $n=k+1$  のときも成り立つ。(i), (ii)より題意は示された。

- (2) [必要性]

$\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  のとき、

$2^n$  を 3 で割った余りは 1 …①,  $n2^{n-1}$  を 3 で割った余りは 0 …② である。

ここで、「 $n$  が偶数のときには  $2^n$  を 3 で割った余りは 1」…③ となり、

「 $n$  が奇数のときには  $2^n$  を 3 で割った余りは 2」…④ となることを数学的帰納法で示す。

(A)  $n$  が偶数のとき

$n=2$  のとき、 $2^2 = 3 \cdot 1 + 1$  となるので③が成り立つ。

$n=2k$  のとき、 $2^{2k} = 3p_{2k} + 1$  ( $p_{2k} \in \mathbb{Z}$ ) と表せるとすると、

$$2^{2(k+1)} = 4 \cdot 2^{2k} = 4(3p_{2k} + 1) = 3(4p_{2k} + 1) + 1 \text{ より}$$

$n=2(k+1)$  のときも③が成り立つ。

(B)  $n$  が奇数のとき

$n=1$  のとき、 $2^1 = 3 \cdot 0 + 2$  となるので④が成り立つ。

$n=2k-1$  のとき、 $2^{2k-1} = 3p_{2k-1} + 2$  と表せるとすると、

$$2^{2(k+1)-1} = 4 \cdot 2^{2k-1} = 4(3p_{2k-1} + 2) = 3(4p_{2k-1} + 2) + 2 \text{ より}$$

$n=2(k+1)$  のときも④が成り立つ。

数学的帰納法によって、③、④は示された。

したがって、①、(A)、(B)より、 $n$  は偶数であることがわかる。

また、②より  $2^{n-1}$  は3で割り切れないので、 $n$  は3の倍数である。

よって、 $n$  は6の倍数である。

[十分性]

$n$  が6の倍数のとき、 $n=6m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) と表せる。

このとき、 $a_{6m} = d_{6m} = 2^{6m}$  について

(i)  $m=1$  のとき

$$2^6 = 64 = 3 \cdot 21 + 1 \text{ より } \alpha_1 = 1, \delta_1 = 1 \text{ が成り立っている。}$$

(ii)  $m=k$  のとき

$\alpha_k = 1, \delta_k = 1$  が成り立つ、すなわち  $2^{6k} = 3l + 1$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ) と表せると仮定する。

$$\text{このとき、} 2^{6(k+1)} = 2^{6k} \cdot 2^6 = (3l + 1) \cdot 64 = 3(64l + 21) + 1$$

となるので、 $m=k+1$  のときも成り立つ。

よって数学的帰納法により,  $n$ が6の倍数のとき  $\alpha_n = 1, \delta_n = 1$  である。

また,  $b_n = n2^{n-1}$  より  $b_{6m} = 6m \cdot 2^{6m-1} = 3 \cdot 2m \cdot 2^{6m-1}$  なので  $n$ が6の倍数のとき  $\beta_n = 0$  である。

さらに,  $c_n = 0$  より  $n$ が6の倍数のとき  $\gamma_n = 0$  である。