[東京工業大学 1993 年後期 $\boxed{2}$]

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とし，正の整数 n に対し $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とおく。

(1) $a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n$ を求めよ。

(2) $a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n$ を 3 で割った余りを $\alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n,\ \delta_n$ と書く。

$\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ。

---

(1) $a_n=2^n,\ b_n=n2^{n-1},\ c_n=0,\ d_n=2^n$ となることを数学的帰納法で示す。

（ i ）$n=1$ のとき

$a_1=2,\ b_1=1,\ c_1=0,\ d_1=2$ であり，$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ であるから成り立っている。

（ ii ）$n=k$ のとき

$a_k=2^k,\ b_k=k2^{k-1},\ c_k=0,\ d_k=2^k$ と仮定する。

このとき，

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{pmatrix}=A^{k+1}=AA^k=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{k+1} & k2^k+2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2^{k+1} & (k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。(i), (ii)より題意は示された。

(2) 〔必要性〕

$\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，

2^n を 3 で割った余りは 1 …①， $n2^{n-1}$ を 3 で割った余りは 0 …② である。

ここで，「n が偶数のときには 2^n を 3 で割った余りは 1」…③ となり，

「n が奇数のときには 2^n を 3 で割った余りは 2」…④ となることを数学的帰納法で示す。

(A) n が偶数のとき

$n=2$ のとき，$2^2=3\cdot1+1$ となるので③が成り立つ。

$n=2k$ のとき，$2^{2k}=3p_{2k}+1$（$p_{2k}\in\mathbb{Z}$）と表せるとすると，

$2^{2(k+1)}=4\cdot2^{2k}=4(3p_{2k}+1)=3(4p_{2k}+1)+1$ より

$n=2(k+1)$ のときも③が成り立つ。

(B) n が奇数のとき

$n=1$ のとき，$2^1=3\cdot0+2$ となるので④が成り立つ。

$n=2k-1$ のとき，$2^{2k-1}=3p_{2k-1}+2$ と表せるとすると，

$2^{2(k+1)-1}=4\cdot2^{2k-1}=4(3p_{2k-1}+2)=3(4p_{2k}+2)+2$ より

$n=2(k+1)$ のときも④が成り立つ。

数学的帰納法によって，③，④は示された。

したがって，①，(A)，(B)より，n は偶数であることがわかる。

また，②より 2^{n-1} は 3 で割り切れないので，n は 3 の倍数である。

よって，n は 6 の倍数である。

〔十分性〕

n が 6 の倍数のとき，$n=6m$（$m\in\mathbb{Z}$）と表せる。

このとき，$a_{6m}=d_{6m}=2^{6m}$ について

（ｉ）$m=1$ のとき

$2^6=64=3\cdot21+1$ より $\alpha_1=1$，$\delta_1=1$ が成り立っている。

（ⅱ）$m=k$ のとき

$\alpha_k=1, \delta_k=1$ が成り立つ，すなわち $2^{6k}=3\ell+1$（$\ell\in\mathbb{Z}$）と表せると仮定する。

このとき，$2^{6(k+1)}=2^{6k}\cdot2^6=(3\ell+1)\cdot64=3(64\ell+21)+1$

となるので，$m=k+1$ のときも成り立つ。

よって数学的帰納法により， n が 6 の倍数のとき $\alpha_n = 1, \delta_n = 1$ である。

また，$b_n = n2^{n-1}$ より $b_{6m} = 6m \cdot 2^{6m-1} = 3 \cdot 2m \cdot 2^{6m-1}$ なので n が 6 の倍数のとき $\beta_n = 0$ である。

さらに， $c_n = 0$ より n が 6 の倍数のとき $\gamma_n = 0$ である。