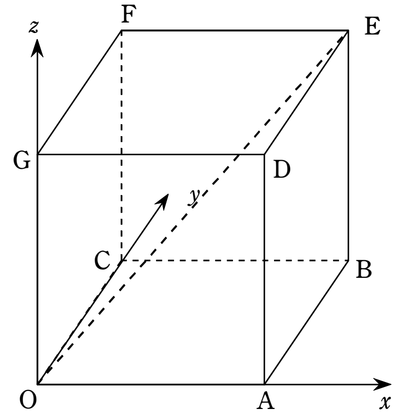
[東京工業大学 1993 年後期 $\boxed{1}$]

☆

一辺の長さが 1 の立方体を，中心を通る対角線のうち一本を軸として回転させたとき，この立方体が通過する部分の体積を求めよ。

☆

OA, OC, OG をそれぞれ x, y, z 軸にとり，図のような立方体 OABC - DEFG を考える。



直線OE 上の点 P(x, y, z) は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ （$t \in \mathbb{R}$）と表せる。

P を通り OE に垂直な平面を α_t の方程式は

$1 \cdot (x-t) + 1 \cdot (y-t) + 1 \cdot (z-t) = u \iff x+y+z=3t$

となる。

P が O から E まで動くとき，立方体上かつ α_t 上の点で， P から最も遠い点は

(i) $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき OA 上

(ii) $\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき AB 上

(iii) $\dfrac{2}{3} \leqq t \leqq 1$ のとき BE 上

にある。

題意の回転体の平面 α_t による断面は円であり，対称性から $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ における体積と $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ は等しい。

ここで，(i)のときの α_t と OA の交点を Q，(ii)のときの α_t と AB の交点を R とする。

Q について $\begin{cases} x+y+z=3t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ より Q$(3t, 0, 0)$

R について $\begin{cases} x+y+z=3t \\ x=1 \\ z=0 \end{cases}$ より R$(1, 3t-1, 0)$

である。

よって，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき　$\mathrm{PQ}^2 = 4t^2 + t^2 + t^2 = 6t^2$

$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき　$\mathrm{PR}^2 = (t-1)^2 + (-2t+1)^2 + t^2 = 6t^2 - 6t + 2$

である。

ここで，$\mathrm{OP} = u$　とおくと　$u = \sqrt{3}t$　であるから，求める体積をV とすると

$$V = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \pi \mathrm{PQ}^2\,du + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi \mathrm{PR}^2\,du$$

$$= \pi \left\{ \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} 4u^2\,du + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (4u^2 + 2\sqrt{3}u + 2)\,du \right\}$$

$$= \pi \left\{ \left[\frac{4}{3}u^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} + \left[\frac{4}{3}u^3 + \sqrt{3}u^2 + 2u \right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$