[東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{1}$]

原点 $(0,\ 0)$ を通る 2 つの放物線と直線をそれぞれ

$$C_1 : y = ax^2 + bx \ \ (a \neq 0),\ \ C_2 : y = px^2 + qx \ (p \neq 0),\ \ L : y = kx \ \ (k \neq b,\ k \neq q)$$

とし，C_1 と L で囲まれる部分の面積を S_1，C_2 と L で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき，S_1 と S_2 の比が k によらないための必要十分条件を求めよ。

C_1, L の交点の x 座標を求めると，

$ax^2 + bx = kx \iff x(ax + b - k) = 0$ より $x = 0,\ \dfrac{k-b}{a}$

よって $S_1 = \left| \displaystyle\int_0^{\frac{k-b}{a}} \{ax^2 + bx - kx\}\,dx \right|$

$$= \left| a\int_0^{\frac{k-b}{a}} x\left(x - \frac{k-b}{a}\right)dx \right|$$

$$= a \cdot \frac{1}{6}\left|\left(\frac{k-b}{a}\right)^3\right|$$

$$= \frac{1}{6a^2}|k-b|^3$$

同様にして $S_2 = \dfrac{1}{6p^2}|k-q|^3$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{p^2}{a^2} \cdot \frac{|k-b|^3}{|k-q|^3}$$

$$= \frac{p^2}{a^2} \cdot \left|\frac{k-b}{k-q}\right|^3$$

$$= \frac{p^2}{a^2} \cdot \left|1 - \frac{q-b}{k-q}\right|^3$$

よって S_1 と S_2 の比が k によらないための条件は $q = b$

［ 東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{2}$ ］

☆────────────────────────────☆

n を自然数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}$ を示せ。

☆────────────────────────────☆

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left\{(2n+1)\cdot\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right\}$

$$=(2n+1)\cdot1\cdot1$$

$$=2n+1$$

(2) $\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x=2\cos2nx\sin x$ より

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}-\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}=2\cos2nx$$

ここで，$\displaystyle I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$ $(n\geqq0)$ とおくと

$n\geqq1$ のとき

$$I_n-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos2nx\,dx$$

$$=\left[\frac{\sin2nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=0$$

より $I_n=I_{n-1}$ $(n\geqq1)$ を得る。

したがって $I_n=I_0$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\pi}{2}$$

［ 東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{4}$ ］

☆ ☆

n を自然数，$P(x)$ を n 次の多項式とする。

$P(0), P(1), \cdots, P(n)$ が整数ならば，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ。

☆ ☆

「n 次多項式 $P(x)$ に対して，$P(0), P(1), \cdots, P(n)$ が整数ならば，

すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数」…①

であることを，次数 n に関する数学的帰納法で示す。

（ｉ）$n=1$ のとき

$P(x)=ax+b$ とおくことができる。

$P(0)=b,\ P(1)=a+b$ がともに整数なので，

$a=P(1)-P(0)$，$b=P(0)$ はともに整数である。

よって，すべての整数 k に対し，$P(k)=ak+b$ は整数であるから①が成り立つ。

（ⅱ）$n=m\,(\geqq 1)$ のとき，①が成り立つと仮定する。

$R(x)$ を「$m+1$ 次多項式で，$R(0), R(1), \cdots, R(m+1)$ は整数」…②

を満たすものとする。このとき，

$R(x+1)-R(x)=\{a(x+1)^{m+1}+\cdots\}-(ax^{m+1}+\cdots)=$（$m$ 次式）

であるから，m 次多項式 $P(x)$ を用いて

$R(x+1)-R(x)=P(x)$ …③

と表すことができる。

よって②より，$P(0), P(1), \cdots, P(m)$ は整数

であるから帰納法の仮定①より，すべての整数 k に対して $P(k)$ は整数である。

よって③より，$R(\ell)$ が整数ならば，

$R(\ell+1)=P(\ell)+R(\ell)$，$R(\ell-1)=R(\ell)-P(\ell-1)$ はともに整数である。

これと，$R(0)$ が整数であることより，帰納的にすべての整数 k に対し，$R(k)$ は整数となる。

従って，$n=m+1$ のときも①は成り立つ。

（ｉ）(ⅱ)より，数学的帰納法によって題意は示された。

[別解]

「n次多項式$P(x)$に対して，$P(0),\ P(1),\ \cdots,\ P(n)$ が整数ならば，

すべての整数kに対し，$P(k)$は整数」…①

であることを，次数nに関する数学的帰納法で示す。

(ｉ) $n=1$のとき

$P(x)=ax+b$ とおくことができる。

$P(0)=b,\ P(1)=a+b$ がともに整数なので，

$a=P(1)-P(0)$，$b=P(0)$ はともに整数である。

よって，すべての整数kに対し，$P(k)=ak+b$ は整数であるから①が成り立つ。

(ⅱ) $n=m(\geqq 1)$のとき，①が成り立つと仮定する。

このとき，

「$m+1$次多項式$P(x)$に対して，$P(0),\ P(1),\ \cdots,\ P(m+1)$ が整数ならば，

すべての整数kに対し，$P(k)$は整数となること」を示す。

$R(x)=P(x+1)-P(x)$ とおくと，$R(x)$は（高々）m次式であり，仮定より

$R(0)=P(1)-P(0)$

$R(1)=P(2)-P(1)$

$\vdots$

$R(m)=P(m+1)-P(m)$

はすべて整数であり，m次多項式に対する仮定から$R(k)$は整数となる。

任意のkに対して$R(k)$が整数なので，

$P(k)$の階差 $\cdots,\ P(-1)-P(-2),\ P(0)-P(-1),\ P(1)-P(0),\ \cdots$ がすべて整数になる。

$P(0)$が整数なので，帰納的にすべてのkに対して$P(k)$は整数となる。

(ｉ)(ⅱ)より，数学的帰納法によって題意は示された。

[別解 2]

まず，次の補題を数学的帰納法により証明する。

（補題）　0 以上の整数 i に対し，

$$\begin{cases} p_0(x)=1 \\ p_i(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-i)}{i!} \quad (i\geqq 1) \end{cases}$$ とおく。

このとき，一般の n 次多項式 $P(x)$ $(n\geqq 0)$ は， $p_i(x)$ の線形結合として表される。

すなわち，適当な実数 c_i を用いて，

$$P(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_np_n(x)$$
$$=\sum_{i=0}^{n}c_ip_i(x)$$

（ⅰ） $n=0$ のとき

$P(x)=c_0\cdot 1=c_0$ より成り立つ。

（ⅱ） $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k$ のとき，補題が成り立つと仮定すると，

任意の（$k+1$）次多項式 $f(x)=a_{k+1}x^{k+1}+a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$ に対して

$g(x)=f(x)-a_{k+1}(k+1)!\,p_{k+1}(x)$ とおくと

$g(x)$ は高々 k 次の多項式で，帰納法の仮定より $g(x)$ は $p_i(x)$ の線形結合として表され，

$f(x)=a_{k+1}(k+1)!\,p_{k+1}(x)+\sum_{i=0}^{k}c_ip_i(x)$ と表せることになる。

$a_{k+1}(k+1)!=c_{k+1}$ とおくことにより（$k+1$）次多項式 $f(x)$ も $p_i(x)$ の線形結合で表されることがわかる。

よって，(ⅰ)(ⅱ)より数学的帰納法により補題は示された。

$P(x)$ を補題の $p_i(x)$ を用いて $P(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_np_n(x)$ とおく。

このとき， $P(0)=c_0-c_1+c_2-c_3+\cdots+c_{n-1}$

$P(1)=c_0$

$P(2)=c_0+c_1$

$P(3)=c_0+2c_1+c_2$

$\vdots$

$$P(n)=c_0+{}_n\mathrm{C}_1c_1+{}_n\mathrm{C}_2c_2+\cdots+c_{n-1}$$

となるので,

「 $P(1),\ P(2),\ \cdots,\ P(n)$ がすべて整数」⇔「 $c_0,\ c_1,\cdots,\ c_n$ がすべて整数」

が成り立つ。

　また，連続する m 個の整数の積は， $m!$ の倍数であるから，任意の整数 k に対して $p_i(k)$ は整数であるので， $P(k)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_np_n(x)$ は整数である。

よって題意は示された。

[東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{3}$]

4 次曲線 $C : y = x^4 - 2ax^2\ (a > 0)$ 上の動点 $\mathrm{P} = (t,\ t^4 - 2at^2)$ が $-\sqrt{a} \leqq t \leqq \sqrt{a}$ の範囲で動く。

P での C の接線と C との交点を P， $\mathrm{Q} = (\alpha,\ \alpha^4 - 2a\alpha^2)$， $\mathrm{R} = (\beta,\ \beta^4 - 2a\beta^2)$ とする。ただし，$\alpha \leqq \beta$ とする。

(1) $\alpha + \beta$， $\alpha\beta$ を a と t で表せ。

(2) 3 点 P, Q, R が接線上 Q, P, R の順になるための条件を求めよ。

(3) 線分 $\overline{\mathrm{QR}}$ の長さを L とする。L^2 を a と t で表せ。

(4) $a = \dfrac{7}{12}$ のとき，L の最大値を求めよ。

---

(1) $f(x) = x^4 - 2ax^2$ とおくと

$f'(x) = 4x^3 - 4ax$ であり，C 上の $\mathrm{P}(t,\ t^4 - 2at^2)$ における接線の方程式は

$$y = \left(4t^3 - 4at\right)(x - t) + t^4 - 2at^2$$

接線と C との交点の x 座標について

$$x^4 - 2ax^2 = \left(4t^3 - 4at\right)(x - t) + t^4 - 2at^2$$

$$x^4 - 2ax^2 = \left(4t^3 - 4at\right)x - 4t^4 + 4at^2 + t^4 - 2at^2$$

$$x^4 - 2ax^2 - \left(4t^3 - 4at\right)x + 3t^4 - 2at^2 = 0$$

$$(x - t)\left\{x^3 + tx^2 + (-2a + t^2)x - 3t^3 + 2at\right\} = 0$$

$$(x - t)^2\left(x^2 + 2tx + 3t^2 - 2a\right) = 0$$

より，α, β は $x^2 + 2tx + 3t^2 - 2a = 0$ の 2 解である。

よって，解と係数の関係より $\alpha + \beta = -2t,\ \alpha\beta = 3t^2 - 2a$

(2) 3 点 P, Q, R が接線上 Q, P, R の順になるためには $\alpha < t < \beta$ となればよい。

したがって $(t - \alpha)(t - \beta) < 0 \iff t^2 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta < 0$

(1)より　$\alpha+\beta=-2t,\ \alpha\beta=3t^2-2a$　であるから

$$t^2-(-2t)t+3t^2-2a<0 \ \Leftrightarrow\ 6t^2-2a<0 \ \Leftrightarrow\ t^2<\frac{a}{3} \quad \text{より} \quad -\frac{\sqrt{3a}}{3}<t<\frac{\sqrt{3a}}{3}$$

(3)　$L^2=(\beta-\alpha)^2+(\beta^4-2a\beta^2-\alpha^4+2a\alpha^2)^2$

$$=(\beta-\alpha)^2+\left\{(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2+\alpha^2)-2a(\beta^2-\alpha^2)\right\}^2$$

$$=(\beta-\alpha)^2+\left\{(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2+\alpha^2-2a)\right\}^2$$

$$=(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2(\beta^2+\alpha^2-2a)^2$$

$$=(\beta-\alpha)^2\left\{1+(\beta+\alpha)^2(\beta^2+\alpha^2-2a)^2\right\}$$　となる。

ここで，$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-2t)^2-4(3t^2-2a)=-8t^2+8a$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2t)^2-2(3t^2-2a)=-2t^2+4a$　より

$$L^2=(-8t^2+8a)\left\{1+(-2t)^2(-2t^2+4a-2a)^2\right\}$$

$$=(-8t^2+8a)\left\{1+4t^2(-2t^2+2a)^2\right\}$$

$$=-8(t^2-a)\left\{1+16t^2(t^2-a)^2\right\}$$

(4)　$t^2-a=s$　とおき，$L^2=g(s)$　とすると，

$$g(s)=-8s\{1+16(s+a)s^2\}$$

$$=-8\left(s+16s^4+16as^3\right)$$

$$g'(s)=-8\left(64s^3+48as^2+1\right)$$

$a=\dfrac{7}{12}$　より

$$g'(s)=-8\left(64s^3+28s^2+1\right)$$

$$=-8(2s+1)(32s^2-2s+1)$$

$32s^2-2s+1>0$ であり $0\leqq t\leqq a$ ， $a=\dfrac{7}{12}$ より $-\dfrac{7}{12}\leqq s\leqq 0$ なので，

$g(s)$ の増減は右表に従う。

s	$-\dfrac{7}{12}$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	0
$g'(s)$		$+$	0	$-$	
$g(s)$		$\nearrow$	$\dfrac{16}{3}$	$\searrow$	

よって

$s=-\dfrac{1}{2}$ のときに極大かつ最大となり，このとき

$$L^2=-8\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)+16\left(-\frac{1}{2}\right)^4+16\cdot\frac{7}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right\}=-8\left(-\frac{1}{2}+1-\frac{7}{6}\right)=\frac{16}{3}$$ であるから

L の最大値は $\sqrt{\dfrac{16}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

[東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{5}$]

☆ ☆

サイコロを 4 回ふり，出る目の数を順に，x_1, x_2, x_3, x_4 とするとき，

点 $\mathrm{P}=(x_1, x_2)$，$\mathrm{O}=(0, 0)$，$\mathrm{Q}=(x_3, -x_4)$ のなす角 $\angle\mathrm{POQ}$ が鋭角になる確率を求めよ。

☆ ☆

サイコロを 4 回ふるとき，すべての目の出方は $6^4=1296$ 通りであり，これらは同様に確からしい。

$\angle\mathrm{POQ}$ が鋭角になるとき，$\cos\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}>0$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}>0$ となるから

$x_1x_3-x_2x_4>0 \Leftrightarrow x_1x_3>x_2x_4$ を満たせばよい。

x_1, x_2, x_3, x_4 の対称性から「$x_1x_3>x_2x_4$ となる場合の数」と「$x_1x_3<x_2x_4$ となる場合の数」は等しい。

そこで，$x_1x_3=x_2x_4$ となる場合の数を求める。

＜2 数の積の表＞

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

表より，2 数の積となる値は 1，2，3，…，36 に限られ，2 数の積がそれぞれの値のとき，

$x_1x_3=x_2x_4$ となる場合の数は次の通りだけある。

2 数の積	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
場合の数	1	4	4	9	4	16	4	1	4	16	4	1	4	4	4	1	4	1

これらの総数は，1＋4＋4＋9＋4＋16＋4＋1＋4＋16＋4＋1＋4＋4＋4＋1＋4＋1＝86 通り。

よって，$x_1x_3>x_2x_4$ となる場合の数は，$(1296-86)\div 2=605$ 通り。

したがって求める確率は $\dfrac{605}{1296}$

[別解]（$x_1x_3 > x_2x_4$ となる場合の数の別の数え方）

①：x_1x_3 の値

②：x_1x_3 が①の値となる場合の数

③：x_1x_3 が①の値となるとき，$x_1x_3 > x_2x_4$ となる x_2x_4 の場合の数

④：x_1x_3 が①の値となるとき，$x_1x_3 > x_2x_4$ となる場合の数

これを表にすると次のようになる。

①	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
②	1	2	2	3	2	4	2	1	2	4	2	1	2	2	2	1	2	1
③	0	1	3	5	8	10	14	16	17	19	23	25	26	28	30	32	33	35
④	0	2	6	15	16	40	28	16	34	76	46	25	52	56	60	32	66	35

④をすべて加えると，

$$0+2+6+15+16+40+28+16+34+76+46+25+52+56+60+32+66+35=605$$

よって求める確率は $\dfrac{605}{1296}$