[東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{1}$]

原点 $(0,\ 0)$ を通る 2 つの放物線と直線をそれぞれ

$$C_1 : y = ax^2 + bx \ \ (a \neq 0),\ \ C_2 : y = px^2 + qx \ (p \neq 0),\ \ L : y = kx \ \ (k \neq b,\ k \neq q)$$

とし，C_1 と L で囲まれる部分の面積を S_1，C_2 と L で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき，S_1 と S_2 の比が k によらないための必要十分条件を求めよ。

[東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

n を自然数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}$ を示せ。

☆ ☆

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left\{(2n+1)\cdot\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right\}$

$=(2n+1)\cdot 1\cdot 1$

$=2n+1$

(2) $\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x=2\cos 2nx\sin x$ より

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}-\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}=2\cos 2nx$$

ここで, $\displaystyle I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$ $(n\geqq 0)$ とおくと

$n\geqq 1$ のとき

$$I_n-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos 2nx\,dx$$

$$=\left[\frac{\sin 2nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=0$$

より $I_n=I_{n-1}$ $(n\geqq 1)$ を得る。

したがって $I_n=I_0$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\pi}{2}$$

[東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{3}$]

4 次曲線 $C: y=x^4-2ax^2\ (a>0)$ 上の動点 $\mathrm{P}=(t,\ t^4-2at^2)$ が $-\sqrt{a} \leqq t \leqq \sqrt{a}$ の範囲で動く。P での C の接線と C との交点を P，$\mathrm{Q}=(\alpha,\ \alpha^4-2a\alpha^2)$，$\mathrm{R}=(\beta,\ \beta^4-2a\beta^2)$ とする。ただし，$\alpha \leqq \beta$ とする。

(1) $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を a と t で表せ。

(2) 3 点 P, Q, R が接線上 Q, P, R の順になるための条件を求めよ。

(3) 線分 $\overline{\mathrm{QR}}$ の長さを L とする。L^2 を a と t で表せ。

(4) $a=\dfrac{7}{12}$ のとき，L の最大値を求めよ。

[東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{4}$]

n を自然数，$P(x)$ を n 次の多項式とする。

$P(0), P(1), \cdots, P(n)$ が整数ならば，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ。

[東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{5}$]

☆ ☆

サイコロを 4 回ふり，出る目の数を順に，x_1, x_2, x_3, x_4 とするとき，

点 $\mathrm{P} = (x_1,\ x_2)$，$\mathrm{O} = (0,\ 0)$，$\mathrm{Q} = (x_3,\ -x_4)$ のなす角 $\angle\mathrm{POQ}$ が鋭角になる確率を求めよ。

☆ ☆