## [ 東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{5}$ ]

サイコロを 4 回ふり，出る目の数を順に，$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ とするとき，

点 $\mathrm{P}=(x_1,\ x_2)$，$\mathrm{O}=(0,\ 0)$，$\mathrm{Q}=(x_3,\ -x_4)$ のなす角 $\angle\mathrm{POQ}$ が鋭角になる確率を求めよ。

サイコロを 4 回ふるとき, すべての目の出方は $6^4=1296$ 通りであり, これらは同様に確からしい。

$\angle\mathrm{POQ}$ が鋭角になるとき，$\cos\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}>0$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}>0$ となるから

$x_1x_3-x_2x_4>0 \iff x_1x_3>x_2x_4$ を満たせばよい。

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ の対称性から「$x_1x_3>x_2x_4$ となる場合の数」と「$x_1x_3<x_2x_4$ となる場合の数」は等しい。

そこで，$x_1x_3=x_2x_4$ となる場合の数を求める。

＜2 数の積の表＞

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

表より，2 数の積となる値は 1，2，3，⋯，36 に限られ，2 数の積がそれぞれの値のとき，

$x_1x_3=x_2x_4$ となる場合の数は次の通りだけある。

| 2 数の積 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 20 | 24 | 25 | 30 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 場合の数 | 1 | 4 | 4 | 9 | 4 | 16 | 4 | 1 | 4 | 16 | 4 | 1 | 4 | 4 | 4 | 1 | 4 | 1 |

これらの総数は，1＋4＋4＋9＋4＋16＋4＋1＋4＋16＋4＋1＋4＋4＋4＋1＋4＋1＝86 通り。

よって，$x_1x_3>x_2x_4$ となる場合の数は，$(1296-86)\div 2=605$ 通り。

したがって求める確率は $\dfrac{605}{1296}$

[別解]　（$x_1x_3 > x_2x_4$ となる場合の数の別の数え方）

①：$x_1x_3$ の値

②：$x_1x_3$ が①の値となる場合の数

③：$x_1x_3$ が①の値となるとき，$x_1x_3 > x_2x_4$ となる $x_2x_4$ の場合の数

④：$x_1x_3$ が①の値となるとき，$x_1x_3 > x_2x_4$ となる場合の数

これを表にすると次のようになる。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 20 | 24 | 25 | 30 | 36 |
| ② | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 1 | 2 | 4 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| ③ | 0 | 1 | 3 | 5 | 8 | 10 | 14 | 16 | 17 | 19 | 23 | 25 | 26 | 28 | 30 | 32 | 33 | 35 |
| ④ | 0 | 2 | 6 | 15 | 16 | 40 | 28 | 16 | 34 | 76 | 46 | 25 | 52 | 56 | 60 | 32 | 66 | 35 |

④をすべて加えると，

0＋2＋6＋15＋16＋40＋28＋16＋34＋76＋46＋25＋52＋56＋60＋32＋66＋35＝605

よって求める確率は $\dfrac{605}{1296}$