[東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{4}$]

☆ ☆

n を自然数，$P(x)$ を n 次の多項式とする。

$P(0), P(1), \cdots, P(n)$ が整数ならば，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ。

☆ ☆

「n 次多項式 $P(x)$ に対して，$P(0), P(1), \cdots, P(n)$ が整数ならば，

すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数」…①

であることを，次数 n に関する数学的帰納法で示す。

（ⅰ）$n=1$ のとき

$P(x)=ax+b$ とおくことができる。

$P(0)=b,\ P(1)=a+b$ がともに整数なので，

$a=P(1)-P(0)$，$b=P(0)$ はともに整数である。

よって，すべての整数 k に対し，$P(k)=ak+b$ は整数であるから①が成り立つ。

（ⅱ）$n=m\,(\geqq 1)$ のとき，①が成り立つと仮定する。

$R(x)$ を「$m+1$ 次多項式で，$R(0), R(1), \cdots, R(m+1)$ は整数」…②

を満たすものとする。このとき，

$R(x+1)-R(x)=\{a(x+1)^{m+1}+\cdots\}-(ax^{m+1}+\cdots)=$（$m$ 次式）

であるから，m 次多項式 $P(x)$ を用いて

$R(x+1)-R(x)=P(x)$ …③

と表すことができる。

よって②より，$P(0), P(1), \cdots, P(m)$ は整数

であるから帰納法の仮定①より，すべての整数 k に対して $P(k)$ は整数である。

よって③より，$R(\ell)$ が整数ならば，

$R(\ell+1)=P(\ell)+R(\ell)$，$R(\ell-1)=R(\ell)-P(\ell-1)$ はともに整数である。

これと，$R(0)$ が整数であることより，帰納的にすべての整数 k に対し，$R(k)$ は整数となる。

従って，$n=m+1$ のときも①は成り立つ。

（ⅰ)(ⅱ)より，数学的帰納法によって題意は示された。

[別解]

「n 次多項式 $P(x)$ に対して，$P(0),\ P(1),\ \cdots,\ P(n)$ が整数ならば，

すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数」…①

であることを，次数 n に関する数学的帰納法で示す。

（ⅰ）$n=1$ のとき

$P(x)=ax+b$ とおくことができる。

$P(0)=b,\ P(1)=a+b$ がともに整数なので，

$a=P(1)-P(0)$，$b=P(0)$ はともに整数である。

よって，すべての整数 k に対し，$P(k)=ak+b$ は整数であるから①が成り立つ。

（ⅱ）$n=m\,(\geqq 1)$ のとき，①が成り立つと仮定する。

このとき，

「$m+1$ 次多項式 $P(x)$ に対して，$P(0),\ P(1),\ \cdots,\ P(m+1)$ が整数ならば，

すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数となること」を示す。

$R(x)=P(x+1)-P(x)$ とおくと，$R(x)$ は（高々）m 次式であり，仮定より

$R(0)=P(1)-P(0)$

$R(1)=P(2)-P(1)$

$\vdots$

$R(m)=P(m+1)-P(m)$

はすべて整数であり，m 次多項式に対する仮定から $R(k)$ は整数となる。

任意の k に対して $R(k)$ が整数なので，

$P(k)$ の階差 $\cdots,\ P(-1)-P(-2),\ P(0)-P(-1),\ P(1)-P(0),\ \cdots$ がすべて整数になる。

$P(0)$ が整数なので，帰納的にすべての k に対して $P(k)$ は整数となる。

（ⅰ)(ⅱ)より，数学的帰納法によって題意は示された。

[別解 2]

まず，次の補題を数学的帰納法により証明する。

（補題） 0 以上の整数 i に対し，

$$\begin{cases} p_0(x)=1 \\ p_i(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-i)}{i!} \quad (i\geqq 1) \end{cases}$$ とおく。

このとき，一般の n 次多項式 $P(x)$ $(n\geqq 0)$ は， $p_i(x)$ の線形結合として表される。

すなわち，適当な実数 c_i を用いて，

$$P(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_np_n(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}c_ip_i(x)$$

（ｉ） $n=0$ のとき

$P(x)=c_0\cdot 1=c_0$ より成り立つ。

（ⅱ） $n=0,1,2,\cdots,k$ のとき，補題が成り立つと仮定すると，

任意の（$k+1$）次多項式 $f(x)=a_{k+1}x^{k+1}+a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$ に対して

$g(x)=f(x)-a_{k+1}(k+1)!\,p_{k+1}(x)$ とおくと

$g(x)$ は高々 k 次の多項式で，帰納法の仮定より $g(x)$ は $p_i(x)$ の線形結合として表され，

$f(x)=a_{k+1}(k+1)!\,p_{k+1}(x)+\displaystyle\sum_{i=0}^{k}c_ip_i(x)$ と表せることになる。

$a_{k+1}(k+1)!=c_{k+1}$ とおくことにより（$k+1$）次多項式 $f(x)$ も $p_i(x)$ の線形結合で表されることがわかる。

よって，(ｉ)(ⅱ)より数学的帰納法により補題は示された。

$P(x)$ を補題の $p_i(x)$ を用いて $P(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_np_n(x)$ とおく。

このとき， $P(0)=c_0-c_1+c_2-c_3+\cdots+c_{n-1}$

$P(1)=c_0$

$P(2)=c_0+c_1$

$P(3)=c_0+2c_1+c_2$

$\vdots$

$$P(n) = c_0 + {}_n\mathrm{C}_1 c_1 + {}_n\mathrm{C}_2 c_2 + \cdots + c_{n-1}$$

となるので，

「 $P(1),\ P(2),\ \cdots,\ P(n)$ がすべて整数」$\Leftrightarrow$「 $c_0,\ c_1, \cdots,\ c_n$ がすべて整数」

が成り立つ。

　また，連続する m 個の整数の積は， $m!$ の倍数であるから，任意の整数 k に対して $p_i(k)$ は整数であるので， $P(k) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_n p_n(x)$ は整数である。

よって題意は示された。