[東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{3}$]

☆―――☆

4 次曲線 $C: y=x^4-2ax^2\ (a>0)$ 上の動点 $\mathrm{P}=(t,\ t^4-2at^2)$ が $-\sqrt{a} \leqq t \leqq \sqrt{a}$ の範囲で動く。

P での C の接線と C との交点を P， $\mathrm{Q}=(\alpha,\ \alpha^4-2a\alpha^2)$， $\mathrm{R}=(\beta,\ \beta^4-2a\beta^2)$ とする。ただし，$\alpha \leqq \beta$ とする。

(1) $\alpha+\beta$， $\alpha\beta$ を a と t で表せ。

(2) 3 点 P, Q, R が接線上 Q, P, R の順になるための条件を求めよ。

(3) 線分 $\overline{\mathrm{QR}}$ の長さを L とする。L^2 を a と t で表せ。

(4) $a=\dfrac{7}{12}$ のとき， L の最大値を求めよ。

☆―――☆

(1) $f(x)=x^4-2ax^2$ とおくと

$f'(x)=4x^3-4ax$ であり， C 上の $\mathrm{P}(t,\ t^4-2at^2)$ における接線の方程式は

$$y=\left(4t^3-4at\right)(x-t)+t^4-2at^2$$

接線と C との交点の x 座標について

$$x^4-2ax^2=\left(4t^3-4at\right)(x-t)+t^4-2at^2$$

$$x^4-2ax^2=\left(4t^3-4at\right)x-4t^4+4at^2+t^4-2at^2$$

$$x^4-2ax^2-\left(4t^3-4at\right)x+3t^4-2at^2=0$$

$$(x-t)\left\{x^3+tx^2+(-2a+t^2)x-3t^3+2at\right\}=0$$

$$(x-t)^2\left(x^2+2tx+3t^2-2a\right)=0$$

より， α, β は $x^2+2tx+3t^2-2a=0$ の 2 解である。

よって，解と係数の関係より $\alpha+\beta=-2t,\ \alpha\beta=3t^2-2a$

(2) 3 点 P, Q, R が接線上 Q, P, R の順になるためには $\alpha<t<\beta$ となればよい。

したがって $(t-\alpha)(t-\beta)<0 \iff t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta<0$

(1)より　$\alpha+\beta=-2t,\ \alpha\beta=3t^2-2a$　であるから

$$t^2-(-2t)t+3t^2-2a<0\ \Leftrightarrow\ 6t^2-2a<0\ \Leftrightarrow\ t^2<\frac{a}{3}\quad\text{より}\quad -\frac{\sqrt{3a}}{3}<t<\frac{\sqrt{3a}}{3}$$

(3)　$L^2=(\beta-\alpha)^2+(\beta^4-2a\beta^2-\alpha^4+2a\alpha^2)^2$

$$=(\beta-\alpha)^2+\left\{(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2+\alpha^2)-2a(\beta^2-\alpha^2)\right\}^2$$

$$=(\beta-\alpha)^2+\left\{(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2+\alpha^2-2a)\right\}^2$$

$$=(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2(\beta^2+\alpha^2-2a)^2$$

$$=(\beta-\alpha)^2\left\{1+(\beta+\alpha)^2(\beta^2+\alpha^2-2a)^2\right\}$$　となる。

ここで，$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-2t)^2-4(3t^2-2a)=-8t^2+8a$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2t)^2-2(3t^2-2a)=-2t^2+4a$　より

$$L^2=(-8t^2+8a)\left\{1+(-2t)^2(-2t^2+4a-2a)^2\right\}$$

$$=(-8t^2+8a)\left\{1+4t^2(-2t^2+2a)^2\right\}$$

$$=-8(t^2-a)\left\{1+16t^2(t^2-a)^2\right\}$$

(4)　$t^2-a=s$　とおき，$L^2=g(s)$　とすると，

$$g(s)=-8s\{1+16(s+a)s^2\}$$

$$=-8\left(s+16s^4+16as^3\right)$$

$$g'(s)=-8\left(64s^3+48as^2+1\right)$$

$a=\dfrac{7}{12}$　より

$$g'(s)=-8\left(64s^3+28s^2+1\right)$$

$$=-8(2s+1)(32s^2-2s+1)$$

$32s^2-2s+1>0$ であり $0 \leqq t \leqq a$ ， $a=\dfrac{7}{12}$ より $-\dfrac{7}{12} \leqq s \leqq 0$ なので，

$g(s)$ の増減は右表に従う。

s	$-\dfrac{7}{12}$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	0
$g'(s)$		$+$	0	$-$	
$g(s)$		$\nearrow$	$\dfrac{16}{3}$	$\searrow$	

よって

$s=-\dfrac{1}{2}$ のときに極大かつ最大となり，このとき

$$L^2=-8\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)+16\left(-\frac{1}{2}\right)^4+16\cdot\frac{7}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right\}=-8\left(-\frac{1}{2}+1-\frac{7}{6}\right)=\frac{16}{3}$$ であるから

L の最大値は $\sqrt{\dfrac{16}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$