[東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{2}$]

☆

n を自然数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}$ を示せ。

☆

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left\{(2n+1)\cdot\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right\}$

$$=(2n+1)\cdot 1\cdot 1$$

$$=2n+1$$

(2) $\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x=2\cos 2nx\sin x$ より

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}-\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}=2\cos 2nx$$

ここで，$\displaystyle I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$ $(n\geqq 0)$ とおくと

$n\geqq 1$ のとき

$$I_n-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos 2nx\,dx$$

$$=\left[\frac{\sin 2nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=0$$

より $I_n=I_{n-1}$ $(n\geqq 1)$ を得る。

したがって $I_n=I_0$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\pi}{2}$$