[東京工業大学 1993 年前期 $\boxed{1}$]

原点 $(0,\ 0)$ を通る 2 つの放物線と直線をそれぞれ

$$C_1 : y = ax^2 + bx \ \ (a \neq 0),\ \ C_2 : y = px^2 + qx \ (p \neq 0),\ \ L : y = kx \ \ (k \neq b,\ k \neq q)$$

とし，C_1 と L で囲まれる部分の面積を S_1，C_2 と L で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき，S_1 と S_2 の比が k によらないための必要十分条件を求めよ。

$C_1,\ L$ の交点の x 座標を求めると，

$ax^2 + bx = kx \iff x(ax + b - k) = 0$ より $x = 0,\ \dfrac{k-b}{a}$

よって $S_1 = \left| \int_0^{\frac{k-b}{a}} \{ax^2 + bx - kx\}\,dx \right|$

$$= \left| a\int_0^{\frac{k-b}{a}} x\left(x - \frac{k-b}{a}\right)dx \right|$$

$$= a \cdot \frac{1}{6}\left|\left(\frac{k-b}{a}\right)^3\right|$$

$$= \frac{1}{6a^2}|k-b|^3$$

同様にして $S_2 = \dfrac{1}{6p^2}|k-q|^3$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{p^2}{a^2} \cdot \frac{|k-b|^3}{|k-q|^3}$$

$$= \frac{p^2}{a^2} \cdot \left|\frac{k-b}{k-q}\right|^3$$

$$= \frac{p^2}{a^2} \cdot \left|1 - \frac{q-b}{k-q}\right|^3$$

よって S_1 と S_2 の比が k によらないための条件は $q = b$