[東京工業大学 1992 年後期 $\boxed{1}$]

☆―――☆

x の関数 $F(x)=\int_0^1 \frac{|t-x|}{t+1}dt$ の最小値を求めよ。

☆―――☆

$G(t)=\int \frac{t-x}{t+1}dt$ とおくと，積分定数を C として

$G(t)=\int\left(1-\frac{x+1}{t+1}\right)dt=t-(x+1)\log|t+1|+C$

（ i ） $x\leqq 0$ のとき

$$F(x)=\int_0^1 \frac{|t-x|}{t+1}dt$$

$$=\int_0^1 \frac{t-x}{t+1}dt$$

$$=\Big[G(t)\Big]_0^1$$

$$=1-(x+1)\log 2$$

（ ii ） $0<x<1$ のとき

$$F(x)=-\int_0^x \frac{t-x}{t+1}dt+\int_x^1 \frac{t-x}{t+1}dt$$

$$=-\{G(x)-G(0)\}+\{G(1)-G(x)\}$$

$$=G(1)-2G(x)$$

$$=1-(x+1)\log 2-2\{x-(x+1)\log(x+1)\}$$

$$=1-2x-(x+1)\log 2+2(x+1)\log(x+1)$$

（iii） $x\geqq 1$ のとき

$$F(x)=-\int_0^x \frac{t-x}{t+1}dt$$

$$=-1+(x+1)\log 2$$

であり， $x\leqq 0$ のとき $F'(x)=-\log 2$， $x\geqq 1$ のとき $F'(x)=\log 2$

$0<x<1$ のとき $F'(x)=-2-\log 2+2\log(x+1)+2=\log\frac{(x+1)^2}{2}$

であるから $F'(x)=0$ となるのは $\frac{(x+1)^2}{2}=1$ より $x=\sqrt{2}-1$ のときのみ。

$F(x)$ の増減は下表に従う。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$F(x)$	$\searrow$		$\searrow$	最小	$\nearrow$		$\nearrow$

よって $F(x)$ は $x=\sqrt{2}-1$ のとき最小となり，最小値は

$$F\left(\sqrt{2}-1\right)=1-2\left(\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{2}\log 2+2\sqrt{2}\log\sqrt{2}$$

$$=3-2\sqrt{2}$$

[東京工業大学 1992 年後期 $\boxed{2}$]

☆―――☆

$0<a<1$とする。座標平面上で原点A_0から出発してx軸の正の方向にaだけ進んだ点をA_1とする。次にA_1で進行方向を反時計回りに120°回転しa^2だけ進んだ点をA_2とする。以後同様に$\mathrm{A}_{n\text{-}1}$で反時計回り120°回転してa^nだけ進んだ点をA_nとする。このとき点列$\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots\cdots$の極限の座標を求めよ。

☆―――☆

$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 0)$を$120^\circ$回転すると $\overrightarrow{v_2}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となり，

さらに120°回転すると $\overrightarrow{v_3}=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+3}}$と$\overrightarrow{\mathrm{A}_{n+3}\mathrm{A}_{n+6}}$は同じ向きのベクトルであり，任意の正の整数$m$について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3m}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}+\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}+\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4}+\overrightarrow{\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5}+\overrightarrow{\mathrm{A}_5\mathrm{A}_6}\right)+\\&\qquad\cdots+\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_{3m-3}\mathrm{A}_{3m-2}}+\overrightarrow{\mathrm{A}_{3m-2}\mathrm{A}_{3m-1}}+\overrightarrow{\mathrm{A}_{3m-1}\mathrm{A}_{3m}}\right)\\&=\left(a\overrightarrow{v_1}+a^2\overrightarrow{v_2}+a^3\overrightarrow{v_3}\right)+a^3\left(a\overrightarrow{v_1}+a^2\overrightarrow{v_2}+a^3\overrightarrow{v_3}\right)+\cdots+a^{3(m-1)}\left(a\overrightarrow{v_1}+a^2\overrightarrow{v_2}+a^3\overrightarrow{v_3}\right)\\&=\left(1+a^3+\cdots+a^{3(m-1)}\right)\left(a\overrightarrow{v_1}+a^2\overrightarrow{v_2}+a^3\overrightarrow{v_3}\right)\\&=\frac{1-a^{3m}}{1-a^3}\left(a\overrightarrow{v_1}+a^2\overrightarrow{v_2}+a^3\overrightarrow{v_3}\right)\end{aligned}$$

$0<a<1$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3m}}&=\frac{1}{1-a^3}\left(a\overrightarrow{v_1}+a^2\overrightarrow{v_2}+a^3\overrightarrow{v_3}\right)\\&=\frac{1}{1-a^3}\left(a(1,\ 0)+a^2\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)+a^3\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\\&=\frac{1}{1-a^3}\left(a-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^3,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a^2-\frac{\sqrt{3}}{2}a^3\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(1-a)(1+a+a^2)}\left(\frac{a(1-a)(a+2)}{2},\ \frac{\sqrt{3}a^2(1-a)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+a+a^2}\left(\frac{a(a+2)}{2},\ \frac{\sqrt{3}a^2}{2}\right)$$

ここで，$m\to\infty$ のとき $a^{3m+1}\overrightarrow{v_1}\to\vec{0},\ a^{3m+2}\overrightarrow{v_2}\to\vec{0}$ であるから

$\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3m+1}}=\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3m+2}}=\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3m}}$ であるので $\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3n}}=\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3m}}$ となる。

よって点列$\{\mathrm{A}_n\}$の極限の座標は $\left(\frac{a(a+2)}{2(1+a+a^2)},\ \frac{\sqrt{3}a^2}{2(1+a+a^2)}\right)$