[東京工業大学 1992 年後期 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$0<a<1$とする。座標平面上で原点$\mathrm{A_0}$から出発してx軸の正の方向にaだけ進んだ点を$\mathrm{A_1}$とする。次に$\mathrm{A_1}$で進行方向を反時計回りに120°回転しa^2だけ進んだ点を$\mathrm{A_2}$とする。以後同様に$\mathrm{A_{n\text{-}1}}$で反時計回り120°回転してa^nだけ進んだ点を$\mathrm{A_n}$とする。このとき点列$\mathrm{A_0, A_1, A_2}, \cdots\cdots$の極限の座標を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 0)$を$120^\circ$回転すると $\overrightarrow{v_2}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となり，

さらに120°回転すると $\overrightarrow{v_3}=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+3}}$と$\overrightarrow{\mathrm{A}_{n+3}\mathrm{A}_{n+6}}$は同じ向きのベクトルであり，任意の正の整数$m$について

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{A_0A}_{3m}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{A_3A_4}}+\overrightarrow{\mathrm{A_4A_5}}+\overrightarrow{\mathrm{A_5A_6}}\right)+ \\
&\qquad \cdots+\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_{3m-3}\mathrm{A}_{3m-2}}+\overrightarrow{\mathrm{A}_{3m-2}\mathrm{A}_{3m-1}}+\overrightarrow{\mathrm{A}_{3m-1}\mathrm{A}_{3m}}\right) \\
&= \left(a\overrightarrow{v_1}+a^2\overrightarrow{v_2}+a^3\overrightarrow{v_3}\right)+a^3\left(a\overrightarrow{v_1}+a^2\overrightarrow{v_2}+a^3\overrightarrow{v_3}\right)+\cdots+a^{3(m-1)}\left(a\overrightarrow{v_1}+a^2\overrightarrow{v_2}+a^3\overrightarrow{v_3}\right) \\
&= \left(1+a^3+\cdots+a^{3(m-1)}\right)\left(a\overrightarrow{v_1}+a^2\overrightarrow{v_2}+a^3\overrightarrow{v_3}\right) \\
&= \frac{1-a^{3m}}{1-a^3}\left(a\overrightarrow{v_1}+a^2\overrightarrow{v_2}+a^3\overrightarrow{v_3}\right)
\end{aligned}$$

$0<a<1$ であるから

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A_0A}_{3m}} &= \frac{1}{1-a^3}\left(a\overrightarrow{v_1}+a^2\overrightarrow{v_2}+a^3\overrightarrow{v_3}\right) \\
&= \frac{1}{1-a^3}\left(a(1,\ 0)+a^2\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)+a^3\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{1-a^3}\left(a-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^3,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a^2-\frac{\sqrt{3}}{2}a^3\right)
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(1-a)(1+a+a^2)}\left(\frac{a(1-a)(a+2)}{2},\ \frac{\sqrt{3}a^2(1-a)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+a+a^2}\left(\frac{a(a+2)}{2},\ \frac{\sqrt{3}a^2}{2}\right)$$

ここで，$m\to\infty$ のとき $a^{3m+1}\overrightarrow{v_1}\to\vec{0},\ a^{3m+2}\overrightarrow{v_2}\to\vec{0}$ であるから

$\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3m+1}}=\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3m+2}}=\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3m}}$ であるので $\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3n}}=\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3m}}$ となる。

よって点列$\{\mathrm{A}_n\}$の極限の座標は $\left(\dfrac{a(a+2)}{2(1+a+a^2)},\ \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2(1+a+a^2)}\right)$