**[ 東京工業大学 1992 年後期 $\boxed{1}$ ]**

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$x$ の関数 $F(x)=\int_0^1 \dfrac{|t-x|}{t+1}dt$ の最小値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$G(t)=\int \dfrac{t-x}{t+1}dt$ とおくと，積分定数を $C$ として

$G(t)=\int\left(1-\dfrac{x+1}{t+1}\right)dt=t-(x+1)\log|t+1|+C$

（ⅰ）$x\leqq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
F(x)&=\int_0^1 \frac{|t-x|}{t+1}dt\\
&=\int_0^1 \frac{t-x}{t+1}dt\\
&=\big[G(t)\big]_0^1\\
&=1-(x+1)\log 2
\end{aligned}
$$

（ⅱ）$0<x<1$ のとき

$$
\begin{aligned}
F(x)&=-\int_0^x \frac{t-x}{t+1}dt+\int_x^1 \frac{t-x}{t+1}dt\\
&=-\{G(x)-G(0)\}+\{G(1)-G(x)\}\\
&=G(1)-2G(x)\\
&=1-(x+1)\log 2-2\{x-(x+1)\log(x+1)\}\\
&=1-2x-(x+1)\log 2+2(x+1)\log(x+1)
\end{aligned}
$$

（ⅲ）$x\geqq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
F(x)&=-\int_0^x \frac{t-x}{t+1}dt\\
&=-1+(x+1)\log 2
\end{aligned}
$$

であり，$x\leqq 0$ のとき $F'(x)=-\log 2$，$x\geqq 1$ のとき $F'(x)=\log 2$

$0<x<1$ のとき $F'(x)=-2-\log 2+2\log(x+1)+2=\log\dfrac{(x+1)^2}{2}$

であるから $F'(x)=0$ となるのは $\dfrac{(x+1)^2}{2}=1$ より $x=\sqrt{2}-1$ のときのみ。

$F(x)$ の増減は下表に従う。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $F(x)$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | 最小 | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |

よって $F(x)$ は $x=\sqrt{2}-1$ のとき最小となり，最小値は

$$F\left(\sqrt{2}-1\right)=1-2\left(\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{2}\log 2+2\sqrt{2}\log\sqrt{2}$$

$$=3-2\sqrt{2}$$