[東京工業大学 1992 年前期 $\boxed{1}$]

☆――☆

x の関数 $\dfrac{x^2-2x+k^2}{x^2+2x+k^2}$ $(k \geqq 0)$ が 1 以外の整数値をとらないような定数 k の値の範囲を求めよ。

☆――☆

$y=\dfrac{x^2-2x+k^2}{x^2+2x+k^2}$ とおく。

（ｉ）$k=0$ のとき

分母について $x^2+2x \neq 0$ より $x \neq 0, -2 \cdots$① である。

$y=1$ とすると $\dfrac{x^2-2x}{x^2+2x}=1$ より $x=0$ となるが，①に反する。

よって，このとき $y=1$ となることはない。

（ii）$k>0$ のとき

分子について $x^2-2x+k^2=0$ となる実数 x が存在するのは，

この 2 次方程式の判別式を D として $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot k^2 \geqq 0$

すなわち，$k^2 \leqq 1$ より $0<k \leqq 1$ のときである。

よって，$0<k \leqq 1$ なる k に対しては，$y=0$ となることがあるので，題意を満たさない。

さらに，$k>1$ のときを考える。

$x=0$ のとき，実際に $y=1$ となって整数値 1 をとることがわかる。

$k>1$ より，y の分子は 0 になることがなく，$y=\dfrac{(x-1)^2-1+k^2}{(x+1)^2-1+k^2}$ より $y>0$ なので

題意の条件を満たすためには，任意の実数 x に対して $y<2$ となればよい。

よって $\dfrac{x^2-2x+k^2}{x^2+2x+k^2}<2 \iff 2(x^2+2x+k^2)>x^2-2x+k^2$

$$\iff x^2+6x+k^2>0 \quad \cdots ②$$

これが任意の実数 x に対して成り立つためには，②の左辺＝0 の判別式を D_2 として

$\dfrac{D_2}{4}=3^2-k^2<0$ となればよい。$k>1$ と合わせて $k>3$ となる。

以上より，題意を満たすような定数 k の値の範囲は $k>3$

[**東京工業大学 1992 年前期 $\boxed{2}$**]

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$による xy 平面の 1 次変換 f が次の 2 つの性質をもつとき，A を a のみを用いて表せ。

（ｉ）点 $\mathrm{P}(1, 1)$ に対して $f(\mathrm{P})=\mathrm{P}$ が成り立つ。

（ii）平面上の点 $\mathrm{X}(x, y)$ および $\mathrm{X}'=f(\mathrm{X})$ に対して，X, X' から原点 O と P を通る直線への垂線をそれぞれ $\mathrm{XH}, \mathrm{X'H'}$ とするとき，$\mathrm{XH}=\mathrm{X'H'}$ が X のとり方によらず成り立つ。

条件(ｉ)より $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$ から $\begin{cases} a+b=1 \\ c+d=1 \end{cases}$ …①

また，$\mathrm{X}'(x', y')$ とおく。

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ …② である。

原点 O と P を通る直線の方程式は $x-y=0$ であり，

題意の条件より，点と直線の距離を考えて $\dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|x'-y'|}{\sqrt{2}}$ …③

②，③より $\dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|ax+by-(cx+dy)|}{\sqrt{2}}$

したがって $|x-y|=|(a-c)x+(b-d)y|$ が成り立つ。

よって $x-y=\pm\{(a-c)x+(b-d)y\}$ である。

(A) $x-y=(a-c)x+(b-d)y$ のとき

$(a-c-1)x+(b-d+1)y=0$ が任意の x, y に対して成り立つことから

$\begin{cases} a-c-1=0 \\ b-d+1=0 \end{cases}$ …④ であり，①かつ④より $b=1-a,\ c=a-1,\ d=2-a$ を得る。

(B) $x-y=-\{(a-c)x+(b-d)y\}$ のとき

$(a-c+1)x+(b-d-1)y=0$ が任意の x, y に対して成り立つことから

$\begin{cases} a-c+1=0 \\ b-d-1=0 \end{cases}$ …⑤ であり，①かつ⑤より $b=1-a,\ c=a+1,\ d=-a$ を得る。

したがって，求める A は $A=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a-1 & 2-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a+1 & -a \end{pmatrix}$

[東京工業大学 1992 年前期 $\boxed{3}$]

$c>1$ を定数とする。xy 平面で，点 $(1,\ c)$ を通る直線 ℓ と放物線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積を最小にする ℓ の傾きを求めよ。また，その最小面積を求めよ。

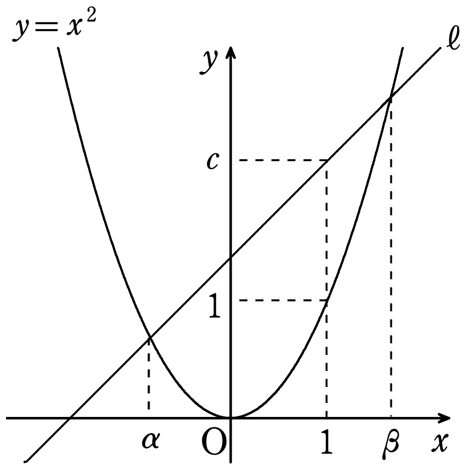
直線 ℓ の傾きを m とし，直線 ℓ の方程式を $y=m(x-1)+c$ とおく。

$c>1$ であるから，必ず直線 ℓ と放物線 $y=x^2$ は異なる 2 点で交わる。

2 式を連立して $x^2=m(x-1)+c \Leftrightarrow x^2-mx+m-c=0$ …①

①の 2 解を α, β（$\alpha<\beta$）とおくと，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=m-c$ …②



直線 ℓ と放物線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta \{(m(x-1)+c)-x^2\}\,dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで，$(\beta-\alpha)^3=\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$

$$=\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}$$

②より $=\left\{m^2-4(m-c)\right\}^{\frac{3}{2}}$

$=\left\{(m-2)^2-4+4c\right\}^{\frac{3}{2}}$ となる。

したがって，S が最小となるのは $m=2$ のときで，

このとき，面積の最小値は $\dfrac{1}{6}(-4+4c)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{4}{3}(c-1)^{\frac{3}{2}}$

[東京工業大学 1992 年前期 $\boxed{4}$]

変数 $0 \leqq x < 1$ の関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leqq x < \dfrac{1}{2} \\ 2x-1 & \dfrac{1}{2} \leqq x < 1 \end{cases}$$

さらに $f_1(x) = f(x)$ とおき, $f_n(x)$ を $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ $(n = 2, 3, 4, \cdots\cdots)$ と定義する。

(1) $f_3(x)$ のグラフを描き, $f_3(x)$ を式で表せ。

(2) k と m を $1 \leqq k \leqq 2^m - 1$ を満たす自然数とし, $p = \dfrac{k}{2^m}$ とおく。

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f_1(p) + \cdots\cdots + f_n(p)}{n}$ を求めよ。

---

(1) $f_1(x) = \begin{cases} 2x & \left(0 \leqq x < \dfrac{1}{2}\right) \\ 2x-1 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x < 1\right) \end{cases}$ であり

$f_2(x) = f(f_1(x))$ より

$0 \leqq x < \dfrac{1}{2}$ に対し, $0 \leqq x < \dfrac{1}{4}$ のとき $f_2(x) = f(f_1(x)) = 2(2x) = 4x$

$\dfrac{1}{4} \leqq x < \dfrac{2}{4}$ のとき $f_2(x) = f(f_1(x)) = 2(2x) - 1 = 4x - 1$

$\dfrac{1}{2} \leqq x < 1$ に対し, $\dfrac{2}{4} \leqq x < \dfrac{3}{4}$ のとき $f_2(x) = f(f_1(x)) = 2(2x-1) = 4x - 2$

$\dfrac{3}{4} \leqq x < 1$ のとき $f_2(x) = f(f_1(x)) = 2(2x-1) - 1 = 4x - 3$ となる。

さらに, $f_3(x) = f(f_2(x))$ より

$0 \leqq x < \dfrac{1}{4}$ に対し, $0 \leqq x < \dfrac{1}{8}$ のとき $f_3(x) = f(f_2(x)) = 2(4x) = 8x$

$\dfrac{1}{8} \leqq x < \dfrac{2}{8}$ のとき $f_3(x) = f(f_2(x)) = 2(4x) - 1 = 8x - 1$

$\dfrac{1}{4} \leqq x < \dfrac{2}{4}$ に対し, $\dfrac{2}{8} \leqq x < \dfrac{3}{8}$ のとき $f_3(x) = f(f_2(x)) = 2(4x-1) = 8x - 2$

$\dfrac{3}{8} \leqq x < \dfrac{4}{8}$ のとき $f_3(x) = f(f_2(x)) = 2(4x-1) - 1 = 8x - 3$

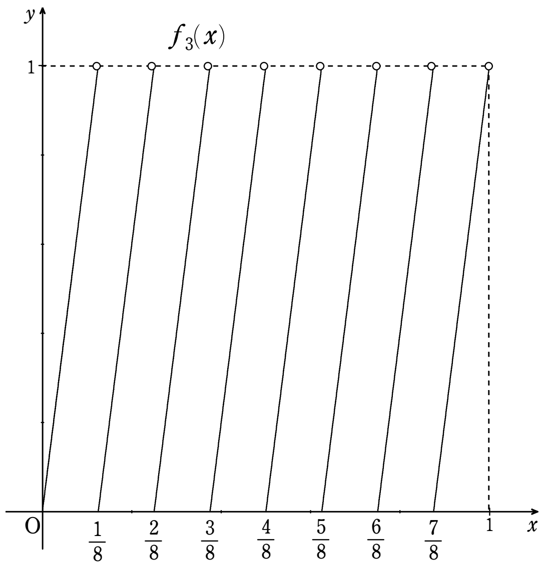
$\dfrac{2}{4} \leqq x < \dfrac{3}{4}$ に対し，$\dfrac{4}{8} \leqq x < \dfrac{5}{8}$ のとき　$f_3(x) = f(f_2(x)) = 2(4x-2) = 8x-4$

$\dfrac{5}{8} \leqq x < \dfrac{6}{8}$ のとき　$f_3(x) = f(f_2(x)) = 2(4x-2)-1 = 8x-5$

$\dfrac{3}{4} \leqq x < 1$ に対し，$\dfrac{6}{8} \leqq x < \dfrac{7}{8}$ のとき　$f_3(x) = f(f_2(x)) = 2(4x-3) = 8x-6$

$\dfrac{7}{8} \leqq x < 1$ のとき　$f_3(x) = f(f_2(x)) = 2(4x-3)-1 = 8x-7$

となる。このグラフを図示すると次のようになる。



(2)

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n x & \left(0 \leqq x < \dfrac{1}{2^n}\right) \\ 2^n x - 1 & \left(\dfrac{1}{2^n} \leqq x < \dfrac{2}{2^n}\right) \\ \quad \vdots & \\ 2^n x - (2^n - 1) & \left(\dfrac{2^n - 1}{2^n} \leqq x < 1\right) \end{cases}$$

…（＊）となることを数学的帰納法で示す。

（ⅰ）$n = 1$ のとき

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x & \left(0 \leqq x < \dfrac{1}{2}\right) \\ 2x - 1 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x < 1\right) \end{cases}$$

となり，成り立つ。

（ⅱ）$n = m$ のとき

（＊）が成り立つと仮定する。

$f_{m+1}(x)=f(f_m(x))$ であるから

$f_m(x)$ の $2^m x-k\ \left(\dfrac{k}{2^m}\leqq x<\dfrac{k+1}{2^m}\right)$ の部分が

$$\begin{cases} 2(2^m x-k)=2^{m+1}-2k & \left(\dfrac{2k}{2^{m+1}}\leqq x<\dfrac{2k+1}{2^{m+1}}\right) \\ 2(2^m x-k)-1=2^{m+1}x-(2k+1) & \left(\dfrac{2k+1}{2^{m+1}}\leqq x<\dfrac{2k+2}{2^{m+1}}\right) \end{cases}$$

となり， $n=m+1$ のときにも成り立つ。

ここで， $p=\dfrac{k}{2^m}$ とすると， $f_m(p)=f_m\left(\dfrac{k}{2^m}\right)=0$ であり

$f_{m+1}(p)=f(f_m(p))=f(0)=0$

以下， $f_{m+2}(p)=f_{m+3}(p)=\cdots=0$ なので

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f_1(p)+\cdots\cdots+f_n(p)}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{f_1(p)+\cdots+f_{m-1}(p)+f_m(p)+\cdots+f_n(p)}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{f_1(p)+\cdots+f_{m-1}(p)}{n}\\&=0\end{aligned}$$

[東京工業大学 1992 年前期 $\boxed{5}$]

$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し

$$I_n=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos(2n-1)x}{\cos x}dx$$

とおく。

(1) I_n-I_{n-1} を求めよ。

(2) I_3 を求めよ。

---

(1) $n≧2$ のとき

$$\begin{aligned}
I_n-I_{n-1}&=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos(2n-1)x}{\cos x}dx-(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos(2n-3)x}{\cos x}dx\\
&=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{x\cos(2n-1)x}{\cos x}+\frac{x\cos(2n-3)x}{\cos x}\right\}dx\\
&=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos x}\{\cos(2n-1)x+\cos(2n-3)x\}\,dx\\
&=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos x}\cdot 2\cos(2n-2)x\cdot\cos x\,dx\\
&=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cdot 2\cos(2n-2)x\,dx\\
&=(-1)^n\left\{\left[x\cdot\frac{1}{n-1}\sin(2n-2)x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\cdot\frac{1}{n-1}\sin(2n-2)x\,dx\right\}\\
&=(-1)^n\left\{\frac{\pi}{4(n-1)}\sin\frac{n-1}{2}\pi+\left[\frac{1}{2(n-1)^2}\cos(2n-2)x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right\}\\
&=(-1)^n\left\{\frac{\pi}{4(n-1)}\sin\frac{n-1}{2}\pi+\frac{1}{2(n-1)^2}\left(\cos\frac{n-1}{2}\pi-1\right)\right\}
\end{aligned}$$

(2) 上の結果において，$n=2,\ 3$ とおいた式 $I_2-I_1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$，$I_3-I_2=\dfrac{1}{4}$ を辺々加えると

$I_3-I_1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}$ となる。

ここで，$I_1=-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\ dx=-\frac{\pi^2}{32}$ であるから $I_3=-\dfrac{\pi^2}{32}+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}$ となる。