

[東京工業大学 1992 年前期 1]



x の関数 $\frac{x^2 - 2x + k^2}{x^2 + 2x + k^2}$ ($k \geq 0$) が 1 以外の整数値をとらないような定数 k の値の範囲を求めよ。



[東京工業大学 1992 年前期 2]



行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ による xy 平面の 1 次変換 f が次の 2 つの性質をもつとき、 A を a のみを用いて表せ。

(i) 点 $P(1, 1)$ に対して $f(P) = P$ が成り立つ。

(ii) 平面上の点 $X(x, y)$ および $X' = f(X)$ に対して、 X, X' から原点 O と P を通る直線への垂線をそれぞれ $XH, X'H'$ とするとき、 $XH = X'H'$ が X のとり方によらず成り立つ。



[東京工業大学 1992 年前期 3]



$c > 1$ を定数とする。 xy 平面で、点 $(1, c)$ を通る直線 l と放物線 $y = x^2$ で囲まれる図形の面積を最小にする l の傾きを求めよ。また、その最小面積を求めよ。



[東京工業大学 1992 年前期 4]



変数 $0 \leq x < 1$ の関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

さらに $f_1(x) = f(x)$ とおき, $f_n(x)$ を $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) と定義する。

(1) $f_3(x)$ のグラフを描き, $f_3(x)$ を式で表せ。

(2) k と m を $1 \leq k \leq 2^m - 1$ を満たす自然数とし, $p = \frac{k}{2^m}$ とおく。

極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(p) + \dots + f_n(p)}{n}$ を求めよ。



[東京工業大学 1992 年前期 5]



$n = 1, 2, \dots$ に対し

$$I_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos(2n-1)x}{\cos x} dx$$

とおく。

(1) $I_n - I_{n-1}$ を求めよ。

(2) I_3 を求めよ。

