[東京工業大学 1992 年前期 $\boxed{5}$]

$n=1, 2, \cdots\cdots$ に対し

$$I_n=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos(2n-1)x}{\cos x}dx$$

とおく。

(1) I_n-I_{n-1} を求めよ。

(2) I_3 を求めよ。

---

(1) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
I_n-I_{n-1}&=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos(2n-1)x}{\cos x}dx-(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos(2n-3)x}{\cos x}dx\\
&=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{x\cos(2n-1)x}{\cos x}+\frac{x\cos(2n-3)x}{\cos x}\right\}dx\\
&=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos x}\{\cos(2n-1)x+\cos(2n-3)x\}\,dx\\
&=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos x}\cdot 2\cos(2n-2)\,x\cdot\cos x\,dx\\
&=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cdot 2\cos(2n-2)\,x\,dx\\
&=(-1)^n\left\{\left[x\cdot\frac{1}{n-1}\sin(2n-2)x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\cdot\frac{1}{n-1}\sin(2n-2)\,x\,dx\right\}\\
&=(-1)^n\left\{\frac{\pi}{4(n-1)}\sin\frac{n-1}{2}\pi+\left[\frac{1}{2(n-1)^2}\cos(2n-2)x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right\}\\
&=(-1)^n\left\{\frac{\pi}{4(n-1)}\sin\frac{n-1}{2}\pi+\frac{1}{2(n-1)^2}\left(\cos\frac{n-1}{2}\pi-1\right)\right\}
\end{aligned}$$

(2) 上の結果において， $n=2, 3$ とおいた式 $I_2-I_1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$， $I_3-I_2=\frac{1}{4}$ を辺々加えると

$I_3-I_1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$ となる。

ここで， $I_1=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\,dx=-\frac{\pi^2}{32}$ であるから $I_3=-\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$ となる。