[東京工業大学 1992 年前期 $\boxed{4}$]

変数 $0 \leqq x < 1$ の関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} 2x & 0 \leqq x < \dfrac{1}{2} \\ 2x-1 & \dfrac{1}{2} \leqq x < 1 \end{cases}$$

さらに $f_1(x)=f(x)$ とおき，$f_n(x)$ を $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ と定義する。

(1) $f_3(x)$ のグラフを描き，$f_3(x)$ を式で表せ。

(2) k と m を $1 \leqq k \leqq 2^m-1$ を満たす自然数とし，$p=\dfrac{k}{2^m}$ とおく。

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f_1(p)+\cdots\cdots+f_n(p)}{n}$ を求めよ。

---

(1) $f_1(x)=\begin{cases} 2x & \left(0 \leqq x < \dfrac{1}{2}\right) \\ 2x-1 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x < 1\right) \end{cases}$ であり

$f_2(x)=f(f_1(x))$ より

$0 \leqq x < \dfrac{1}{2}$ に対し，$0 \leqq x < \dfrac{1}{4}$ のとき $f_2(x)=f(f_1(x))=2(2x)=4x$

$\dfrac{1}{4} \leqq x < \dfrac{2}{4}$ のとき $f_2(x)=f(f_1(x))=2(2x)-1=4x-1$

$\dfrac{1}{2} \leqq x < 1$ に対し，$\dfrac{2}{4} \leqq x < \dfrac{3}{4}$ のとき $f_2(x)=f(f_1(x))=2(2x-1)=4x-2$

$\dfrac{3}{4} \leqq x < 1$ のとき $f_2(x)=f(f_1(x))=2(2x-1)-1=4x-3$ となる。

さらに，$f_3(x)=f(f_2(x))$ より

$0 \leqq x < \dfrac{1}{4}$ に対し，$0 \leqq x < \dfrac{1}{8}$ のとき $f_3(x)=f(f_2(x))=2(4x)=8x$

$\dfrac{1}{8} \leqq x < \dfrac{2}{8}$ のとき $f_3(x)=f(f_2(x))=2(4x)-1=8x-1$

$\dfrac{1}{4} \leqq x < \dfrac{2}{4}$ に対し，$\dfrac{2}{8} \leqq x < \dfrac{3}{8}$ のとき $f_3(x)=f(f_2(x))=2(4x-1)=8x-2$

$\dfrac{3}{8} \leqq x < \dfrac{4}{8}$ のとき $f_3(x)=f(f_2(x))=2(4x-1)-1=8x-3$

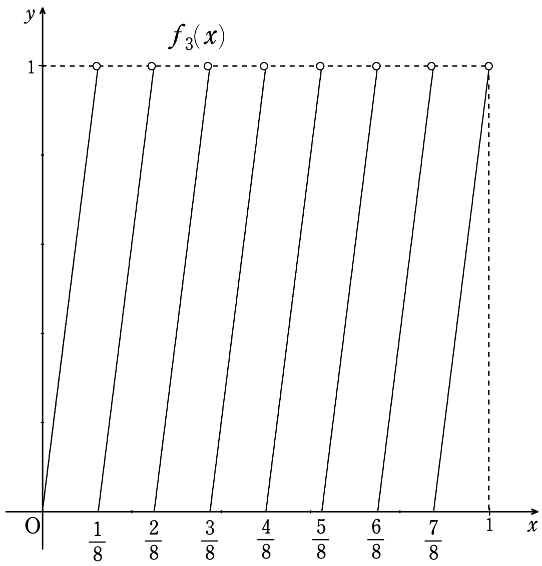
$\dfrac{2}{4} \leqq x < \dfrac{3}{4}$ に対し，$\dfrac{4}{8} \leqq x < \dfrac{5}{8}$ のとき　$f_3(x) = f(f_2(x)) = 2(4x-2) = 8x-4$

$\dfrac{5}{8} \leqq x < \dfrac{6}{8}$ のとき　$f_3(x) = f(f_2(x)) = 2(4x-2)-1 = 8x-5$

$\dfrac{3}{4} \leqq x < 1$ に対し，$\dfrac{6}{8} \leqq x < \dfrac{7}{8}$ のとき　$f_3(x) = f(f_2(x)) = 2(4x-3) = 8x-6$

$\dfrac{7}{8} \leqq x < 1$ のとき　$f_3(x) = f(f_2(x)) = 2(4x-3)-1 = 8x-7$

となる。このグラフを図示すると次のようになる。



(2)

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n x & \left(0 \leqq x < \dfrac{1}{2^n}\right) \\ 2^n x - 1 & \left(\dfrac{1}{2^n} \leqq x < \dfrac{2}{2^n}\right) \\ \vdots & \\ 2^n x - (2^n - 1) & \left(\dfrac{2^n - 1}{2^n} \leqq x < 1\right) \end{cases}$$

…（＊）となることを数学的帰納法で示す。

（ⅰ）$n=1$ のとき

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x & \left(0 \leqq x < \dfrac{1}{2}\right) \\ 2x-1 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x < 1\right) \end{cases}$$

となり，成り立つ。

（ⅱ）$n=m$ のとき

（＊）が成り立つと仮定する。

$f_{m+1}(x)=f(f_m(x))$ であるから

$f_m(x)$ の $2^m x-k$ $\left(\dfrac{k}{2^m}\leqq x<\dfrac{k+1}{2^m}\right)$ の部分が

$$\begin{cases} 2(2^m x-k)=2^{m+1}-2k & \left(\dfrac{2k}{2^{m+1}}\leqq x<\dfrac{2k+1}{2^{m+1}}\right) \\ 2(2^m x-k)-1=2^{m+1}x-(2k+1) & \left(\dfrac{2k+1}{2^{m+1}}\leqq x<\dfrac{2k+2}{2^{m+1}}\right) \end{cases}$$

となり， $n=m+1$ のときにも成り立つ。

ここで， $p=\dfrac{k}{2^m}$ とすると， $f_m(p)=f_m\left(\dfrac{k}{2^m}\right)=0$ であり

$f_{m+1}(p)=f(f_m(p))=f(0)=0$

以下， $f_{m+2}(p)=f_{m+3}(p)=\cdots=0$ なので

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{f_1(p)+\cdots\cdots+f_n(p)}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{f_1(p)+\cdots+f_{m-1}(p)+f_m(p)+\cdots+f_n(p)}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{f_1(p)+\cdots+f_{m-1}(p)}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$