[東京工業大学 1992 年前期 $\boxed{3}$]

☆ ☆

$c>1$ を定数とする。xy 平面で，点 $(1,\ c)$ を通る直線 ℓ と放物線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積を最小にする ℓ の傾きを求めよ。また，その最小面積を求めよ。

☆ ☆

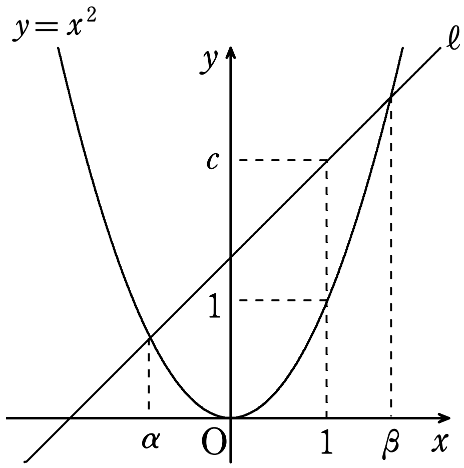
直線 ℓ の傾きを m とし，直線 ℓ の方程式を $y=m(x-1)+c$ とおく。

$c>1$ であるから，必ず直線 ℓ と放物線 $y=x^2$ は異なる 2 点で交わる。

2 式を連立して $x^2=m(x-1)+c \Leftrightarrow x^2-mx+m-c=0$ …①

①の 2 解を α, β（$\alpha<\beta$）とおくと，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=m-c$ …②



直線 ℓ と放物線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta\{(m(x-1)+c)-x^2\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで，$(\beta-\alpha)^3=\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$

$$=\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}$$

②より $=\left\{m^2-4(m-c)\right\}^{\frac{3}{2}}$

$=\left\{(m-2)^2-4+4c\right\}^{\frac{3}{2}}$ となる。

したがって，S が最小となるのは $m=2$ のときで，

このとき，面積の最小値は $\frac{1}{6}(-4+4c)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}(c-1)^{\frac{3}{2}}$