**[ 東京工業大学 1992 年前期 $\boxed{2}$ ]**

---

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ による $xy$ 平面の 1 次変換 $f$ が次の 2 つの性質をもつとき，$A$ を $a$ のみを用いて表せ。

(ｉ) 点 $\mathrm{P}(1, 1)$ に対して $f(\mathrm{P})=\mathrm{P}$ が成り立つ。

(ⅱ) 平面上の点 $\mathrm{X}(x, y)$ および $\mathrm{X}'=f(\mathrm{X})$ に対して，$\mathrm{X}, \mathrm{X}'$ から原点 $\mathrm{O}$ と $\mathrm{P}$ を通る直線への垂線をそれぞれ $\mathrm{XH}, \mathrm{X}'\mathrm{H}'$ とするとき，$\mathrm{XH}=\mathrm{X}'\mathrm{H}'$ が $\mathrm{X}$ のとり方によらず成り立つ。

---

条件(ｉ)より $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$ から $\begin{cases} a+b=1 \\ c+d=1 \end{cases}$ …①

また，$\mathrm{X}'(x', y')$ とおく。

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ …② である。

原点 $\mathrm{O}$ と $\mathrm{P}$ を通る直線の方程式は $x-y=0$ であり，

題意の条件より，点と直線の距離を考えて $\dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|x'-y'|}{\sqrt{2}}$ …③

②，③より $\dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|ax+by-(cx+dy)|}{\sqrt{2}}$

したがって $|x-y|=|(a-c)x+(b-d)y|$ が成り立つ。

よって $x-y=\pm\{(a-c)x+(b-d)y\}$ である。

(A) $x-y=(a-c)x+(b-d)y$ のとき

$(a-c-1)x+(b-d+1)y=0$ が任意の $x, y$ に対して成り立つことから

$\begin{cases} a-c-1=0 \\ b-d+1=0 \end{cases}$ …④ であり，①かつ④より $b=1-a,\ c=a-1,\ d=2-a$ を得る。

(B) $x-y=-\{(a-c)x+(b-d)y\}$ のとき

$(a-c+1)x+(b-d-1)y=0$ が任意の $x, y$ に対して成り立つことから

$\begin{cases} a-c+1=0 \\ b-d-1=0 \end{cases}$ …⑤ であり，①かつ⑤より $b=1-a,\ c=a+1,\ d=-a$ を得る。

したがって，求める $A$ は $A=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a-1 & 2-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a+1 & -a \end{pmatrix}$