[東京工業大学 1992 年前期 $\boxed{1}$]

☆────────────────────────────☆

xの関数 $\dfrac{x^2-2x+k^2}{x^2+2x+k^2}$ $(k \geqq 0)$ が 1 以外の整数値をとらないような定数kの値の範囲を求めよ。

☆────────────────────────────☆

$y=\dfrac{x^2-2x+k^2}{x^2+2x+k^2}$ とおく。

（ｉ）$k=0$のとき

分母について $x^2+2x \neq 0$より $x \neq 0, -2 \cdots①$ である。

$y=1$ とすると $\dfrac{x^2-2x}{x^2+2x}=1$ より $x=0$ となるが，①に反する。

よって，このとき $y=1$ となることはない。

（ⅱ）$k>0$のとき

分子について $x^2-2x+k^2=0$ となる実数xが存在するのは，

この 2 次方程式の判別式をDとして $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot k^2 \geqq 0$

すなわち，$k^2 \leqq 1$ より $0<k \leqq 1$ のときである。

よって，$0<k \leqq 1$なるkに対しては，$y=0$となることがあるので，題意を満たさない。

さらに，$k>1$のときを考える。

$x=0$のとき，実際に $y=1$ となって整数値 1 をとることがわかる。

$k>1$ より，yの分子は0になることがなく，$y=\dfrac{(x-1)^2-1+k^2}{(x+1)^2-1+k^2}$ より $y>0$ なので

題意の条件を満たすためには，任意の実数xに対して $y<2$ となればよい。

よって $\dfrac{x^2-2x+k^2}{x^2+2x+k^2}<2 \iff 2(x^2+2x+k^2)>x^2-2x+k^2$

$$\iff x^2+6x+k^2>0 \quad \cdots②$$

これが任意の実数xに対して成り立つためには，②の左辺＝0 の判別式をD_2として

$\dfrac{D_2}{4}=3^2-k^2<0$ となればよい。$k>1$ と合わせて $k>3$ となる。

以上より，題意を満たすような定数kの値の範囲は $k>3$