[東京工業大学 1991 年後期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

10 進法表示の n 桁の正の整数で，隣り合う桁の数字が互いに異なるような数の個数を a_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a_n を求めよ。

(2) 上の数のうちで，1 の位の数字が 0 である数の個数を b_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

☆ ☆

(1) 最高位の数に 0 は使えないので，最高位に入る数字は 9 通り。後は隣り合う桁の数字が異なっていることから $a_n = 9^n$

(2) n 桁の正の整数で，隣り合う桁の数字が互いに異なるような数のうち，1 の位の数字が 0 でないものの個数を c_n とする。

このとき，a_n は「b_n と c_n の和」であるから $a_n = b_n + c_n$

ここで，c_n の 1 の位の数字は 0 でなく，b_{n+1} の 1 の位の数字が 0 であることから $c_n = b_{n+1}$

よって $a_n = b_n + c_n = b_n + b_{n+1}$ となる。したがって $b_{n+1} = a_n - b_n$ であるから

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_{n-1} - b_{n-1} \\
&= a_{n-1} - (a_{n-2} - b_{n-2}) \\
&= a_{n-1} - a_{n-2} + b_{n-2} \\
&= \cdots \\
&= a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} a_1 + (-1)^{n-1} b_1 \\
&= 9^{n-1} - 9^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} 9^1 + (-1)^{n-1} b_1 \\
&= \frac{9^{n-1}\left\{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)} + (-1)^{n-1} b_1
\end{aligned}
$$

10 進法表示の n 桁の正の整数を考えているので，$b_1 = 0$ であるから

$$b_n = \frac{9^n}{10} + (-1)^{n-1}\frac{9}{10}$$

したがって $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{10} + (-1)^{n-1}\frac{9}{10\cdot 9^n}\right\}$

$\displaystyle = \frac{1}{10}$ となる。

[東京工業大学 1991 年後期 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

原点 O を中心とする半径 2 の円 K の内部に，一辺の長さが 2 で対角線の交点が O となるような正方形 ABCD をとる。K 上の点 P において，線分 PO と角 θ で交わる 2 本の半直線を引く。

このとき，P が K 上どのような位置にあっても，これら 2 本の半直線が正方形 ABCD を通るような θ の最大値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

xy 平面上に，円 K と正方形 ABCD を図のようにとる。

第 1 象限における直線 AD と円 K との交点を P′ とすると $\angle \mathrm{AP'O} = \dfrac{\pi}{6}$ となる。

求める θ はこれより大きいことはないので，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき 2 つの半直線が正方形 ABCD と必ず共有点をもつことを示せば，θ の最大値が $\dfrac{\pi}{6}$ であることになる。

$\mathrm{P}(2\cos\alpha,\ 2\sin\alpha)$ $\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ とおく。

（i）$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{6}$ のとき

$\angle \mathrm{DPO} = \theta$ とおく。$\overrightarrow{\mathrm{PD}} = (1-2\cos\alpha,\ 1-2\sin\alpha)$，$\overrightarrow{\mathrm{PO}} = (-2\cos\alpha,\ -2\sin\alpha)$ より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PD}}||\overrightarrow{\mathrm{PO}}|} = \frac{-2\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2\sin\alpha + 4\sin^2\alpha}{\sqrt{(1-2\cos\alpha)^2 + (1-2\sin\alpha)^2}\cdot 2} = \frac{2-(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\sqrt{6-4(\cos\alpha+\sin\alpha)}}$$

ここで，$t = \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと

$$\cos\theta = f(t) = \frac{2-t}{\sqrt{6-4t}}$$

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{6}$ より $\dfrac{\pi}{4} \leqq \alpha + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{5}{12}\pi$ なので $1 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \cdots ①$ である。

$$f'(t) = \frac{-\sqrt{6-4t} - (2-t)\cdot\dfrac{1}{2}(6-4t)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4)}{6-4t} = \frac{-(6-4t)+2(2-t)}{(6-4t)\sqrt{6-4t}} = \frac{2t-2}{(6+4t)\sqrt{6+4t}}$$

②において $f'(t) \geqq 0$ より $f(t)$ は単調増加なので $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq f(t)\bigl(=\cos\theta\bigr) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，正方形 ABCD と共有点をもつ。

（ⅱ）$\dfrac{\pi}{6} \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$\angle \mathrm{APO} = \theta$ とおく。$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (-1-2\cos\alpha, 1-2\sin\alpha)$，$\overrightarrow{\mathrm{PO}} = (-2\cos\alpha, -2\sin\alpha)$ より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PO}}|} = \frac{2\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2\sin\alpha + 4\sin^2\alpha}{\sqrt{(-1-2\cos\alpha)^2 + (1-2\sin\alpha)^2} \cdot 2} = \frac{2+\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{6+4(\cos\alpha - \sin\alpha)}}$$

ここで，$t = \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと

$$\cos\theta = f(t) = \frac{2+t}{\sqrt{6+4t}}$$

$\dfrac{\pi}{6} \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{5}{12}\pi \leqq \alpha + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なので $0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \cdots$② である。

$$f'(t) = \frac{\sqrt{6+4t} - (2+t)\cdot\dfrac{1}{2}(6+4t)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4}{6+4t} = \frac{6+4t-2(2+t)}{(6+4t)\sqrt{6+4t}} = \frac{2t+2}{(6+4t)\sqrt{6+4t}}$$

②において $f'(t) > 0$ より $f(t)$ は単調増加なので $\dfrac{2}{\sqrt{6}} \leqq f(t)\left(=\cos\theta\right) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，正方形ABCDと共有点をもつ。

したがって，θ の最大値は $\dfrac{\pi}{6}$ である。