

[東京工業大学 1991 年後期 2]



原点 O を中心とする半径 2 の円 K の内部に、一辺の長さが 2 で対角線の交点が O となるような正方形 $ABCD$ をとる。 K 上の点 P において、線分 PO と角 θ で交わる 2 本の半直線を引く。

このとき、 P が K 上どのような位置にあっても、これら 2 本の半直線が正方形 $ABCD$ を通るような θ の最大値を求めよ。



xy 平面上に、円 K と正方形 $ABCD$ を図のようにとる。

第 1 象限における直線 AD と円 K との交点を P' とすると $\angle AP'O = \frac{\pi}{6}$ となる。

求める θ はこれより大きいことはないので、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき 2 つの半直線が正方形 $ABCD$ と必ず共有

点をもつことを示せば、 θ の最大値が $\frac{\pi}{6}$ であることになる。

$P(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ $\left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}\right)$ とおく。

(i) $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$ のとき

$\angle DPO = \theta$ とおく。 $\overrightarrow{PD} = (1-2\cos\alpha, 1-2\sin\alpha)$, $\overrightarrow{PO} = (-2\cos\alpha, -2\sin\alpha)$ より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PD}| |\overrightarrow{PO}|} = \frac{-2\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2\sin\alpha + 4\sin^2\alpha}{\sqrt{(1-2\cos\alpha)^2 + (1-2\sin\alpha)^2} \cdot 2} = \frac{2 - (\cos\alpha + \sin\alpha)}{\sqrt{6 - 4(\cos\alpha + \sin\alpha)}}$$

ここで、 $t = \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ とおくと

$$\cos\theta = f(t) = \frac{2-t}{\sqrt{6-4t}}$$

$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$ より $\frac{\pi}{4} \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{12}\pi$ なので $1 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2} \dots \textcircled{1}$ である。

$$f'(t) = \frac{-\sqrt{6-4t} - (2-t) \cdot \frac{1}{2} (6-4t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4)}{6-4t} = \frac{-(6-4t) + 2(2-t)}{(6-4t)\sqrt{6-4t}} = \frac{2t-2}{(6+4t)\sqrt{6+4t}}$$

②において $f'(t) \geq 0$ より $f(t)$ は単調増加なので $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq f(t) (= \cos\theta) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって、 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、正方形 $ABCD$ と共有点をもつ。

(ii) $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ のとき

$\angle APO = \theta$ とおく。 $\overline{PA} = (-1 - 2\cos\alpha, 1 - 2\sin\alpha)$, $\overline{PO} = (-2\cos\alpha, -2\sin\alpha)$ より

$$\cos\theta = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PO}}{|\overline{PA}| |\overline{PO}|} = \frac{2\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2\sin\alpha + 4\sin^2\alpha}{\sqrt{(-1-2\cos\alpha)^2 + (1-2\sin\alpha)^2} \cdot 2} = \frac{2 + \cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{6+4(\cos\alpha - \sin\alpha)}}$$

ここで, $t = \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ とおくと

$$\cos\theta = f(t) = \frac{2+t}{\sqrt{6+4t}}$$

$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ より $\frac{5}{12}\pi \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$...② である。

$$f'(t) = \frac{\sqrt{6+4t} - (2+t) \cdot \frac{1}{2} (6+4t)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4}{6+4t} = \frac{6+4t - 2(2+t)}{(6+4t)\sqrt{6+4t}} = \frac{2t+2}{(6+4t)\sqrt{6+4t}}$$

②において $f'(t) > 0$ より $f(t)$ は単調増加なので $\frac{2}{\sqrt{6}} \leq f(t) (= \cos\theta) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき, 正方形 ABCD と共有点をもつ。

したがって, θ の最大値は $\frac{\pi}{6}$ である。