[東京工業大学 1991 年後期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

10 進法表示の n 桁の正の整数で，隣り合う桁の数字が互いに異なるような数の個数を a_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a_n を求めよ。

(2) 上の数のうちで，1 の位の数字が 0 である数の個数を b_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

☆ ☆

(1) 最高位の数に 0 は使えないので，最高位に入る数字は 9 通り。後は隣り合う桁の数字が異なっていることから $a_n = 9^n$

(2) n 桁の正の整数で，隣り合う桁の数字が互いに異なるような数のうち，1 の位の数字が 0 でないものの個数を c_n とする。

このとき，a_n は「b_n と c_n の和」であるから $a_n = b_n + c_n$

ここで，c_n の 1 の位の数字は 0 でなく，b_{n+1} の 1 の位の数字が 0 であることから $c_n = b_{n+1}$

よって $a_n = b_n + c_n = b_n + b_{n+1}$ となる。したがって $b_{n+1} = a_n - b_n$ であるから

$$\begin{aligned}
b_n &= a_{n-1} - b_{n-1} \\
&= a_{n-1} - (a_{n-2} - b_{n-2}) \\
&= a_{n-1} - a_{n-2} + b_{n-2} \\
&= \cdots \\
&= a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} a_1 + (-1)^{n-1} b_1 \\
&= 9^{n-1} - 9^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} 9^1 + (-1)^{n-1} b_1 \\
&= \frac{9^{n-1}\left\{1-\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)} + (-1)^{n-1} b_1
\end{aligned}$$

10 進法表示の n 桁の正の整数を考えているので，$b_1 = 0$ であるから

$$b_n = \frac{9^n}{10} + (-1)^{n-1}\frac{9}{10}$$

したがって $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{10} + (-1)^{n-1}\frac{9}{10\cdot 9^n}\right\}$

$\displaystyle = \frac{1}{10}$ となる。