[東京工業大学 1991 年前期 $\boxed{1}$]

☆―――☆

n を正の整数とする。10 進法で表した $n!$ について，1 の位から 10^{m-1} の位までの数字がすべて 0 で，10^m の位の数字が 0 でないとき，関数 $f(n)$ の値を m とする。このとき，次の値を求めよ。

(1) $f(10)$, $f(100)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(10^n)}{10^n}$

☆―――☆

(1) $10!=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

$=3628800$

よって　$f(10)=2$

一般に，m は $n!$ が「10 で割り切れる回数」である。

「10 で割り切れる」⇔「2 でも 5 でも割り切れる」

であるが，$n!$ が 2 で割れる回数と 5 で割れる回数を比べると

2 で割れる回数の方が 5 で割れる回数よりも十分に多いので，

5 で割れる回数がそのまま 10 で割れる回数と一致する。

100! について考えると，1 から 100 までの整数で 5 の倍数は 20 個，25 の倍数は 4 個ある。

よって，100! は 5 で 20＋4＝24 回割り切れる。

したがって　$f(100)=24$

(2) (1)での考察の通り，m は $n!$ の素因数分解における 5 の指数に等しい。

よって，a 以下の最大の整数を $[a]$ とすると

$$m=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{5^k}\right]$$ （ただし，k は $5^k\leqq n,\ 5^{k+1}>n$ を満たす整数）

となる。

よって，n を 10^n で置き換えると，$\left[\dfrac{10^n}{5^k}\right]$ は必ず整数であり，次の不等式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{10^n}{5^k} \leqq f(10^n) \leqq \frac{10^n}{5}+\frac{10^n}{5^2}+\cdots$$

辺々を10^nで割って

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5^k} \leqq \frac{f(10^n)}{10^n} \leqq \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

ここで，$n\to\infty$ とすると，左辺，右辺ともに，$\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{4}$ に収束する。

よってはさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(10^n)}{10^n}=\frac{1}{4}$

[東京工業大学 1991 年前期 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

空間内の xy 平面上の直線 ℓ を楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\ z=0$ の接線とする。直線 ℓ と点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$ を含む平面 π が z 軸と交わる点Qを $(0,\ 0,\ k)$ とするとき，k のとり得る値の範囲を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

xy 平面上の直線 ℓ が $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\ z=0$ と $(\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 0)$（$0\leqq\theta<2\pi$）で接しているとする。

$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ に対し $2x+\dfrac{y}{2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$ より $y\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{y}$ であるから

ℓ の方程式は $y-2\sin\theta=-\dfrac{4\cos\theta}{2\sin\theta}(x-\cos\theta),\ z=0$

$$2\sin\theta\cdot y-4\sin^2\theta=-4\cos\theta\cdot x+4\cos^2\theta,\ z=0$$

$$2\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y-2=0,\ z=0$$ となる。これは $y=0$ のときにも成り立つ。

2 つの平面 $2\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y-2=0,\ z=0$ の交線を含む平面の方程式は

$(2\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y-2)+cz=0$ …① とおくことができる（ただし，平面 $z=0$ を除く。）

これが $\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$ を通るとき，$\cos\theta+\sin\theta-2+c=0$ より

$$c=2-(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=2-\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $2-\sqrt{2}\leqq c\leqq 2+\sqrt{2}$ …② である。

①は $(0,\ 0,\ k)$ を通るから $2\cos\theta\cdot 0+\sin\theta\cdot 0-2+ck=0$

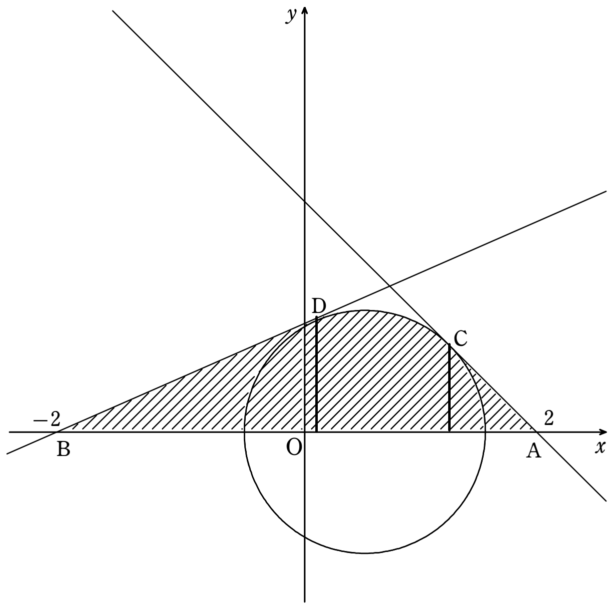
よって $k=\dfrac{2}{c}$

②より $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}\leqq k\leqq\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$

したがって $2-\sqrt{2}\leqq k\leqq 2+\sqrt{2}$ となる。

[東京工業大学 1991 年前期 $\boxed{3}$]

$-1<a<1$とする。2 点$\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(-2,\ 0)$から半円$(x-a)^2+y^2=1,\ y \geqq 0$に 2 本の接線を引き，接点をそれぞれ$\mathrm{C},\ \mathrm{D}$とする。線分$\mathrm{AC}$，円弧$\mathrm{CD}$，線分$\mathrm{DB},\ \mathrm{BA}$で囲まれた図形を$x$軸のまわりに回転してできる立体の体積を$a$で表せ。



接点を $\mathrm{T}(p,\ q)$ とすると，接線の方程式は $(p-a)(x-a)+qy=1$

これが $\mathrm{A}(2,\ 0)$ を通るとき $(p-a)(2-a)=1$ より $p=a+\dfrac{1}{2-a}$

$\mathrm{B}(-2,\ 0)$ を通るとき $(p-a)(-2-a)=1$ より $p=a-\dfrac{1}{2+a}$

したがって C のx座標は $a+\dfrac{1}{2-a}$， D のx座標は $a-\dfrac{1}{2+a}$ である。

$(x-a)^2+y^2=1$ より $y^2=1-(x-a)^2$ であるから

$$y^2\,\Big|_{x=a+\frac{1}{2-a}}=1-\left(\frac{1}{2-a}\right)^2,\quad y^2\,\Big|_{x=a-\frac{1}{2+a}}=1-\left(\frac{1}{2+a}\right)^2 \text{ である。}$$

ACを母線とする円錐の体積をV_1，BDを母線とする円錐の体積をV_2，円弧CDとx軸とで囲まれる図形をx軸のまわりに回転してできる立体の体積をV_3とおくと，

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2-a}\right)^2\right\}\left\{2-\left(a+\frac{1}{2-a}\right)\right\}=\frac{1}{3}\pi\left\{2-a-\frac{2}{2-a}+\left(\frac{1}{2-a}\right)^3\right\}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2+a}\right)^2\right\}\left\{\left(a-\frac{1}{2+a}\right)-(-2)\right\} = \frac{1}{3}\pi\left\{2+a-\frac{2}{2+a}+\left(\frac{1}{2+a}\right)^3\right\}$$

$$V_3 = \int_{a-\frac{1}{2+a}}^{a+\frac{1}{2-a}} \pi\left\{1-(x-a)^2\right\}dx$$

$$= \pi\left[x-\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_{a-\frac{1}{2+a}}^{a+\frac{1}{2-a}} = \pi\left\{\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2+a}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2-a}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2+a}\right)^3\right\}$$

よって求める体積Vは

$$V = V_1+V_2+V_3 = \frac{\pi}{3}\left(4+\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2+a}\right)$$

[東京工業大学 1991 年前期 $\boxed{4}$]

関数 $f(x)=x^3+ax^2+(b-a-1)x$ について次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が $x\geqq 0$ で増加するような点 $(a,\ b)$ の範囲 G を図示せよ。

(2) $y\geqq 0$ における $y=f(x)$ の逆関数を $x=f^{-1}(y)\ \ (x\geqq 0)$ とする。点 $(a,\ b)$ が G を動くとき，定積分 $\displaystyle\int_0^b f^{-1}(y)\,dy$ の最小値を求めよ。

---

(1) $x\geqq 0$ において $f'(x)\geqq 0$ となればよい。

$f(x)=x^3+ax^2+(b-a-1)x$ より

$$f'(x)=3x^3+2ax+b-a-1=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}+b-a-1$$

（ｉ）$-\dfrac{a}{3}\leqq 0$ すわなち $a\geqq 0$ のとき

$f'(0)\geqq 0$ となればよいので $b-a-1\geqq 0$

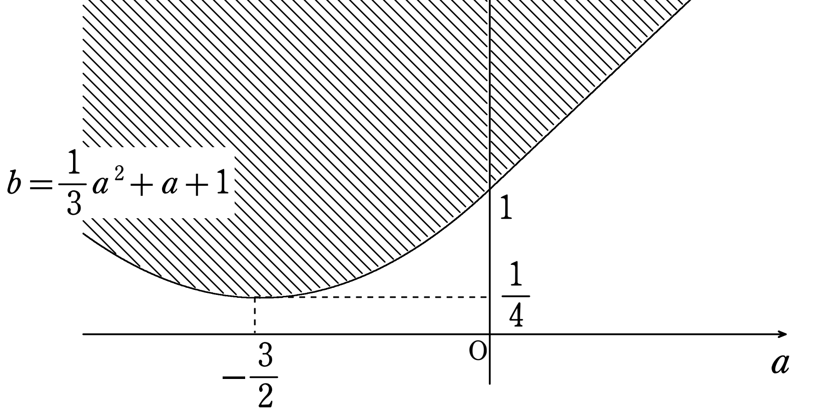
したがって $b\geqq a+1$

（ⅱ）$-\dfrac{a}{3}\geqq 0$ すなわち $a\leqq 0$ のとき

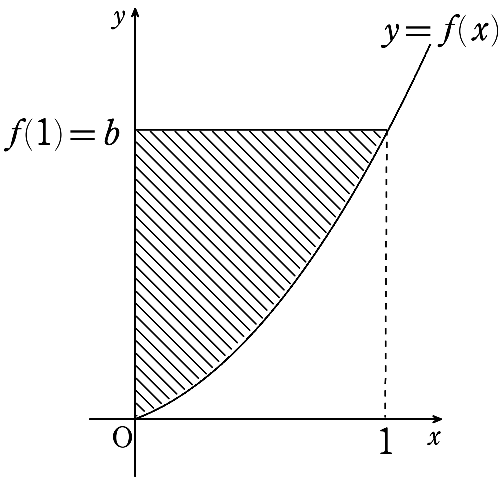
$f'\left(-\dfrac{a}{3}\right)\geqq 0$ となればよいので $-\dfrac{a^2}{3}+b-a-1\geqq 0$

したがって $b\geqq \dfrac{a^2}{3}+a+1=\dfrac{1}{3}\left(a+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

以上(ｉ)(ⅱ)を ab 平面に図示すると次の図のようになる。ただし，境界線上の点を含む。



(2) $A=\int_0^b f^{-1}(y)\,dy$ とおく。



$f(1)=1+a+b-a+-1=b$ なので

$$A=1\times b-\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=b-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b-a-1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=b-\frac{1}{4}-\frac{a}{3}-\frac{b-a-1}{2}$$

$$=\frac{b}{2}+\frac{a}{6}+\frac{1}{4}$$

よって $b=-\dfrac{1}{3}a+2A-\dfrac{1}{2}$

$(a,\ b)$ が G を動くとき，A が最小となるのは

$$\begin{cases} b=\dfrac{a^2}{3}+a+1 \\ b=-\dfrac{1}{3}a+2A-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ が接するときである。

よって $\dfrac{a^2}{3}+a+1=-\dfrac{1}{3}a+2A-\dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $2a^2+8a+9-12A=0$ の判別式を D として

$\dfrac{D}{4}=4^2-2(9-12A)=0$ より $A=\dfrac{1}{12}$

したがって 求める最小値は $\dfrac{1}{12}$

[東京工業大学 1991 年前期 $\boxed{5}$]

サイコロを 3 回振って出た目を a, b, c とする。このとき，方程式 $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ が少なくとも 1 個の整数解をもつ確率を求めよ。

$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ が 整数解 m をもつとき

$m^3 - am^2 + bm - c = 0$ より $m(m^2 - am + b) = c$ となる。

ここで，$m < 0$ とすると $m^2 - am + b \geqq b \geqq 1$ より $c \geqq 1$ と矛盾する。

よって $m > 0$ である。

次に，c の値によって場合分けする。

（ⅰ）$c = 1$ のとき

$m = 1$ であり，$1 - a + b = 1$ より $b = a$

よって $(a, b) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ の 6 通り。

（ⅱ）$c = 2$ のとき

$m = 1, 2$ であり，$1 - a + b = 2$ より $b = a + 1$

$8 - 4a + 2b = 2$ より $b = 2a - 3$

よって $(a, b) = (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (2, 1), (3, 3)$ の 7 通り。

（ⅲ）$c = 3$ のとき

$m = 1, 3$ であり，$1 - a + b = 3$ より $b = a + 2$

$27 - 9a + 3b = 3$ より $b = 3a - 8$

よって $(a, b) = (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (3, 1), (4, 4)$ の 6 通り

（ⅳ）$c = 4$ のとき

$m = 1, 2, 4$ であり，$1 - a + b = 4$ より $b = a + 3$

$8 - 4a + 2b = 4$ より $b = 2a - 2$

$64 - 16a + 4b = 4$ より $b = 4a - 15$

よって $(a, b) = (1, 4), (2, 5), (3, 6), (2, 2), (3, 4), (4, 6), (4, 1), (5, 5)$ の 8 通り。

（v） $c=5$ のとき

$m=1,\ 5$ であり， $1-a+b=5$ より $b=a+4$

$125-25a+5b=5$ より $b=5a-24$

よって $(a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 6),\ (5,\ 1),\ (6,\ 6)$ の 4 通り。

（vi） $c=6$ のとき

$m=1,\ 2,\ 3,\ 6$ であり， $1-a+b=6$ より $b=a+5$

$8-4a+2b=6$ より $b=2a-1$

$27-9a+3b=6$ より $b=3a-9$

$216-36a+6b=6$ より $b=6a-35$

よって $(a,\ b)=(1,\ 6),\ (1,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 5),\ (3,\ 2),\ (4,\ 5),\ (6,\ 1)$ の 7 通り。

サイコロを 3 回振るとき，出る目の場合の数は $6^3=216$ 通りあり，これらは同様に確からしい。

よって求める確率は $\dfrac{6+7+6+8+4+7}{216}=\dfrac{38}{216}$

$$=\frac{19}{108}$$