[東京工業大学 1991 年前期 $\boxed{5}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

サイコロを 3 回振って出た目を $a,\ b,\ c$ とする。このとき，方程式 $x^3-ax^2+bx-c=0$ が少なくとも 1 個の整数解をもつ確率を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$x^3-ax^2+bx-c=0$ が 整数解 m をもつとき

$m^3-am^2+bm-c=0$ より $m(m^2-am+b)=c$ となる。

ここで，$m<0$ とすると $m^2-am+b\geqq b\geqq 1$ より $c\geqq 1$ と矛盾する。

よって $m>0$ である。

次に，c の値によって場合分けする。

（ｉ）$c=1$ のとき

$m=1$ であり，$1-a+b=1$ より $b=a$

よって $(a,\ b)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$ の 6 通り。

（ⅱ）$c=2$ のとき

$m=1,\ 2$ であり，$1-a+b=2$ より $b=a+1$

$8-4a+2b=2$ より $b=2a-3$

よって $(a,\ b)=(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (2,\ 1),\ (3,\ 3)$ の 7 通り。

（ⅲ）$c=3$ のとき

$m=1,\ 3$ であり，$1-a+b=3$ より $b=a+2$

$27-9a+3b=3$ より $b=3a-8$

よって $(a,\ b)=(1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6),\ (3,\ 1),\ (4,\ 4)$ の 6 通り

（ⅳ）$c=4$ のとき

$m=1,\ 2,\ 4$ であり，$1-a+b=4$ より $b=a+3$

$8-4a+2b=4$ より $b=2a-2$

$64-16a+4b=4$ より $b=4a-15$

よって $(a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (2,\ 2),\ (3,\ 4),\ (4,\ 6),\ (4,\ 1),\ (5,\ 5)$ の 8 通り。

（ⅴ）$c=5$ のとき

$m=1,\ 5$ であり，$1-a+b=5$ より $b=a+4$

$125-25a+5b=5$ より $b=5a-24$

よって $(a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 6),\ (5,\ 1),\ (6,\ 6)$ の 4 通り。

（ⅵ）$c=6$ のとき

$m=1,\ 2,\ 3,\ 6$ であり，$1-a+b=6$ より $b=a+5$

$8-4a+2b=6$ より $b=2a-1$

$27-9a+3b=6$ より $b=3a-9$

$216-36a+6b=6$ より $b=6a-35$

よって $(a,\ b)=(1,\ 6),\ (1,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 5),\ (3,\ 2),\ (4,\ 5),\ (6,\ 1)$ の 7 通り。

サイコロを 3 回振るとき，出る目の場合の数は $6^3=216$ 通りあり，これらは同様に確からしい。

よって求める確率は $\dfrac{6+7+6+8+4+7}{216}=\dfrac{38}{216}$

$$=\frac{19}{108}$$