[東京工業大学 1991 年前期 $\boxed{4}$]

関数 $f(x)=x^3+ax^2+(b-a-1)x$ について次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が $x\geqq 0$ で増加するような点 $(a,\ b)$ の範囲 G を図示せよ。

(2) $y\geqq 0$ における $y=f(x)$ の逆関数を $x=f^{-1}(y)$ $(x\geqq 0)$ とする。点 $(a,\ b)$ が G を動くとき，定積分 $\displaystyle\int_0^b f^{-1}(y)\,dy$ の最小値を求めよ。

---

(1) $x\geqq 0$ において $f'(x)\geqq 0$ となればよい。

$f(x)=x^3+ax^2+(b-a-1)x$ より

$$f'(x)=3x^3+2ax+b-a-1=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}+b-a-1$$

(ｉ) $-\dfrac{a}{3}\leqq 0$ すわなち $a\geqq 0$ のとき

$f'(0)\geqq 0$ となればよいので $b-a-1\geqq 0$

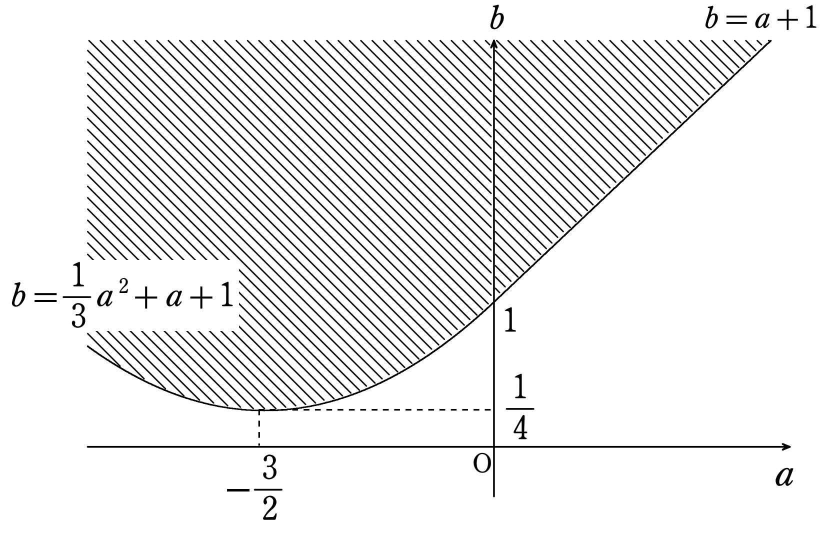
したがって $b\geqq a+1$

(ⅱ) $-\dfrac{a}{3}\geqq 0$ すなわち $a\leqq 0$ のとき

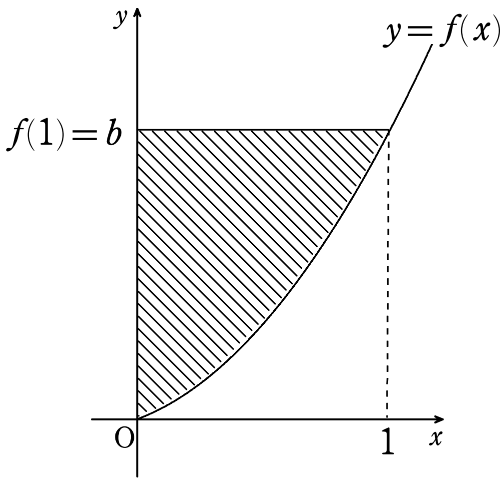
$f'\left(-\dfrac{a}{3}\right)\geqq 0$ となればよいので $-\dfrac{a^2}{3}+b-a-1\geqq 0$

したがって $b\geqq \dfrac{a^2}{3}+a+1=\dfrac{1}{3}\left(a+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

以上(ｉ)(ⅱ)を ab 平面に図示すると次の図のようになる。ただし，境界線上の点を含む。



(2) $A=\int_0^b f^{-1}(y)\,dy$ とおく。



$f(1)=1+a+b-a+-1=b$ なので

$$A=1\times b-\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=b-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b-a-1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=b-\frac{1}{4}-\frac{a}{3}-\frac{b-a-1}{2}$$

$$=\frac{b}{2}+\frac{a}{6}+\frac{1}{4}$$

よって $b=-\frac{1}{3}a+2A-\frac{1}{2}$

$(a,\,b)$ が G を動くとき， A が最小となるのは

$$\begin{cases} b=\dfrac{a^2}{3}+a+1 \\ b=-\dfrac{1}{3}a+2A-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ が接するときである。

よって $\frac{a^2}{3}+a+1=-\frac{1}{3}a+2A-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a^2+8a+9-12A=0$ の判別式を D として

$\frac{D}{4}=4^2-2(9-12A)=0$ より $A=\frac{1}{12}$

したがって 求める最小値は $\frac{1}{12}$